

## PRESENTACIÓN

Estimado estudiante: Como respuesta a la reciente comprensión en el sistema educativo de la necesidad de insertar el componente de investigación en la formación de nuevos profesionales, es que se le propone la presente guía de laboratorio, misma que tiene como propósito, desarrollar en su etapa universitaria habilidades requeridas para este fin.

Podrá notar que en los experimentos se incorporan algunos criterios de rigurosidad, tal como el diseño estadístico de experimentos, que es precisamente la forma más seria y confiable de hacer pruebas y validar hipótesis. Los instrumentos que se presentan son apropiados para afrontar problemas de tipo científico o ingenieril, pues responden probabilísticamente la validez de la propuesta basada en un fundamento teórico para resolver dicho problema.

La clave del éxito en el ejercicio profesional se basa en la capacidad que desarrolle en su vida universitaria para integrar la teoría con la práctica, y nada más adecuado para ejercitar esta habilidad, que empeñándose y prestando interés a las clases de laboratorio. Es importante leer, aplicar y reportar. Por ello se le recomienda: que lea la guía con antelación al experimento, exigiéndose al máximo así mismo, para fortalecer su capacidad de comprensión de lectura; actuar con atención y diligencia en la clase de laboratorio, ya que los ingenieros deben ser prácticos y ejecutivos; y finalmente esmerarse con la preparación del informe, pues aprender a hacer reportes le servirá para mostrar el producto de su trabajo y sus conocimientos.

La Paz, Febrero 2012

Oscar Febo Flores Meneses

Registro SENAPI Nro. 1-074/2012

## ÍNDICE

PRÁCTICA I:	APLICACIÓN DE TEORÍA DE ERRORES	3
PRÁCTICA II:	BALANZA DE JOLLY	15
PRÁCTICA III:	VERTEDEROS	23
PRÁCTICA IV:	DESCARGA POR ORIFICIOS	30
PRÁCTICA V:	VISCOSIMETRÍA	39
PRÁCTICA VI:	COEFICIENTE DE DILATACIÓN LINEAL	45
PRÁCTICA VII:	COEFICIENTE DE CONDUCTIVIDAD TÉRMICA	53
PRÁCTICA VIII:	DETERMINACIÓN DE GAMMA DEL AIRE	60
PRÁCTICA IX:	EQUIVALENTE ELÉCTRICO	67
PRÁCTICA X:	CLASE DE INSTRUMENTACIÓN	75
PRÁCTICA XI:	LEY DE OHM	85
PRÁCTICA XII:	CONDENSADOR VARIABLE	91
PRÁCTICA XIII:	PUENTE DE WHEATSTONE	98
PRÁCTICA XIV:	LEYES DE KIRCHHOFF	104
PRÁCTICA XV:	PRUEBAS DE ONDULACIÓN	111
ANEXO		119

# APLICACIÓN DE TEORÍA DE ERRORES

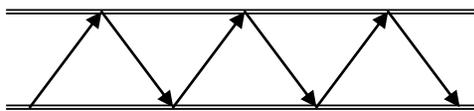
## 1 INTRODUCCIÓN

La importancia del tratamiento de errores en la ingeniería y la investigación en general; es tal, que permite al investigador interpretar científicamente los resultados obtenidos de la experimentación. A continuación se presentarán los conceptos básicos e introductorios del análisis y diseño de experimentos.

1.1 **¿QUÉ ES UN EXPERIMENTO?:** En el ámbito de la tecnología, es frecuente hacer experimentos o pruebas con la intención de resolver un problema o comprobar una idea (conjetura, hipótesis); por ejemplo, hacer algunos cambios en los materiales, métodos o condiciones de operación de un proceso, probar varias temperaturas en una máquina hasta encontrar la que da el mejor resultado o crear un nuevo material con la intención de lograr mejoras o eliminar algún problema relacionado con la ingeniería.

De similar modo, en el ámbito de la investigación básica de las ciencias que fundamentan la ingeniería como la física, el método científico exige la validación de la teoría, modelos, hipótesis, supuestos, mediante el proceso interactivo de la experimentación en un ciclo indefinido como se muestra en la figura 1.

**Teoría:** modelos, hipótesis, supuestos



**Realidad:** hechos, fenómenos, datos

figura 1: proceso interactivo de la experimentación

El experimento es el único camino que relaciona la realidad con la teoría. (flechas de la figura 1)

**PROCESO DE INDUCCIÓN:** Es aquél que se emplea para reformar la hipótesis “teoría” a partir de los datos obtenidos del experimento “realidad” (flechas que suben en la figura 1). Como se podrá advertir, el “proceso de inducción”, requiere del investigador un profundo conocimiento del fenómeno natural, mismo que intentará describir en base a modelos matemáticos.

**PROCESO DE DEDUCCIÓN:** Es aquél en que los modelos o hipótesis “teoría”, son la base para predecir los fenómenos o datos que se obtendrán en el experimento “realidad” (las flechas que bajan en la figura 1). El “proceso de deducción” es el que se empleará en los experimentos de la presente guía para contrastar los modelos o hipótesis ya establecidos por reconocidos científicos.

## 2 ERRORES EXPERIMENTALES

El término *errores experimentales* se aplica a la variabilidad o variación en los resultados obtenidos en un experimento, que no puede ser explicado por los **factores en estudio**, pues existen infinidad de factores (variables) que participan en un fenómeno físico y es imposible controlarlos o considerarlos a todos.

Esta variabilidad mientras sea pequeña constituye el llamado *ERROR ALEATORIO* o fortuito y afecta en el resultado de una medida, ya sea por exceso o defecto indistintamente.

Sin embargo, cuando uno de los factores no controlado o considerado, influye de un modo relevante, los resultados tienden a distorsionar el valor de una medida en la misma proporción y signo (con sesgo), es decir o solamente en exceso o solamente en defecto, por lo que el resultado se alejará del supuesto o hipotético, en tal caso se estaría cometiendo un *ERROR SISTEMÁTICO*.

Puede suceder también, que cuando el experimento no se ha llevado a cabo con el cuidado que corresponde, el equipo o procedimiento no hayan sido los adecuados, entonces los resultados obtenidos en las mediciones se alejen bastante del supuesto o hipotético, tales errores son conocidos como *ERRORES GRAVES O GRUESOS*. Siendo éstos los más comunes en prácticas de laboratorio de cursos básicos de la universidad.

Aunque realice adecuadamente un experimento, encontrará que siempre habrá diferencia entre el valor medido en dicho experimento con el supuesto o real, ésto es normal y se denomina *ERROR ALEATORIO*

### 3 TRATAMIENTO ESTADÍSTICO

Como se indicó anteriormente, al realizar un experimento para contrastar un modelo o hipótesis de la física, encontrará variabilidad en el resultado. Entonces surge la pregunta:

**¿La variabilidad obtenida en el experimento corresponderá sólo al *ERROR DE TIPO ALEATORIO*?**

La respuesta a dicha pregunta, nos las da la estadística con la: *teoría de decisiones o hipótesis*.

**3.1 La muestra aleatoria:** En caso de que la variabilidad de los resultados se deba solo al *error aleatorio*, la distribución de los datos obtenidos es normal o gaussiana. En estadística es un hecho demostrable, que cuando el número de observaciones o medidas corresponde a toda la población o a una muestra grande, la medida de dicha muestra es un buen estimador del valor verdadero, con  $\mu$  promedio verdadero y  $\sigma$  dispersión típica (inferencia estadística) como se muestra en la figura 2.

Ante lo impráctico que resulta trabajar con poblaciones enteras, se recurre a la obtención de muestras que se constituyen en un número limitado de datos extraídos de una población de manera aleatoria.

De modo que se pueda inferir que:

- El promedio de la **población** “ $\mu$ ” DESCONOCIDO, es igual al promedio de la **muestra** “ $\bar{X}$ ”

CONOCIDO. Es decir: 
$$\mu = \bar{X} \quad (1)$$

- La desviación estándar **poblacional** “ $\sigma$ ” DESCONOCIDA, es igual a  $\frac{S}{\sqrt{n}}$ , donde:  $S^2$  es la varianza

**muestral** CONOCIDA,  $n$  es el tamaño de la muestra. Es decir: 
$$\sigma = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

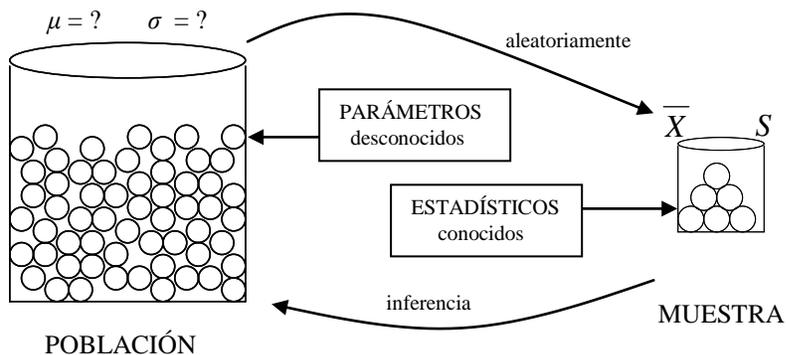


figura 2: Relación entre población y muestra, parámetros y estadísticos

En laboratorio mediremos a partir de muestras, los estadísticos  $\bar{X}, S$ ; y con ellos inferiremos  $\mu, \sigma$

3.2 **Distribución de probabilidad:** Las distribuciones que más se usan en intervalos de confianza y pruebas de hipótesis son las distribuciones:

- Normal
- T de Student
- Ji-cuadrada
- F

Para tamaños de muestra pequeños; por ejemplo ocho medidas, que es lo más corriente en prácticas de laboratorio, el estadístico más apropiado es, la “T de Student”, pues es más ancha respecto del eje horizontal que la “Normal”, por lo tanto más conservadora, aunque para “n” (número de medidas) > 45 las dos distribuciones, la Normal y T de Student se hacen prácticamente iguales. Consecuentemente en la presente guía de laboratorio se empleará en adelante, solamente la T de Student.

3.3 **Intervalo de confianza para una media:** Es el intervalo con probabilidad  $1-\alpha$  en el que se encuentra  $\mu$  (media poblacional desconocida) y se infiere (figura 2) a partir de  $\bar{X}$  y el estadístico  $t$  obtenidos de la muestra en el experimento.

El intervalo está dado por:

$$\bar{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

$$\text{ó} \quad \mu = \bar{X} \pm t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

Como se ve en la figura 3:  $1-\alpha$  representa el intervalo de confianza. La probabilidad porcentual para que un valor esté en el intervalo será entonces:  $100(1-\alpha)$ . Donde:  $\alpha$  es la **significancia**

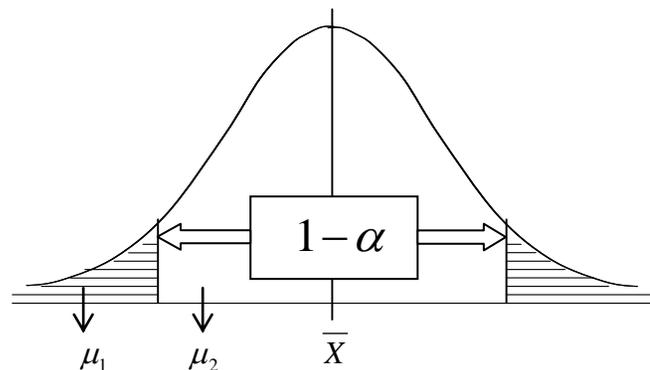


figura 3: Intervalo de confianza

3.4 **Conceptos básicos de prueba de hipótesis:** Un estudio experimental o una investigación, por lo general tiene como último objetivo, responder en forma segura ciertas preguntas y tomar decisiones. En este contexto, el experimentador tiene *a priori* ciertas suposiciones o **hipótesis** que desea comprobar. Por ejemplo:

- La velocidad de caída en régimen permanente de una esfera en un líquido viscoso es constante.
- El caudal de escurrimiento en un vertedero varía potencialmente respecto a la altura de carga.
- El caudal de escurrimiento de un vertedero en condiciones ideales es mayor que en condiciones reales
- El tiempo de vaciado de un fluido desde un recipiente cilíndrico está dado por:  $t = \frac{2 \cdot A \cdot \sqrt{H}}{C_D \cdot a \sqrt{2g}}$  (5)

### 3.5 Prueba de hipótesis

Emplearemos dos tipos:

1. Contraste entre un parámetro obtenido experimentalmente con uno referencial o teórico.
2. Contraste entre dos parámetros obtenidos experimentalmente.

Mismos que se determinan según se muestra a continuación:

## 3.5.1 Contraste entre un parámetro obtenido experimentalmente con uno referencial o teórico.

HIPÓTESIS NULA “H<sub>0</sub>”

$$\mu = \mu_0$$

Donde:

$\mu$  : es la media inferida de  $\bar{X}$  obtenida de un experimento, ecuaciones (3) y (4)

$\mu_0$  : suele representar al valor verdadero o parámetro de comparación.

HIPÓTESIS ALTERNATIVA “H<sub>1</sub>”

Prueba bilateral o de dos colas:  $\mu \neq \mu_0$  (diferente al referencial)

Prueba unilateral o de una cola:  $\mu > \mu_0$  (mayor que el referencial)

Prueba unilateral o de una cola:  $\mu < \mu_0$  (menor que el referencial)

RECHAZO DE LA H<sub>0</sub>

Si:  $|t_{calc.}| > t_{\alpha/2, n-1} \rightarrow \mu_0$  y  $\mu$  tienen una probabilidad “ $1 - \alpha$ ” de ser diferentes (análisis dos colas) (6)

Si:  $t_{calc.} > t_{\alpha, n-1} \rightarrow$  existe una probabilidad “ $1 - \alpha$ ”, que  $\mu_0 > \mu$  (análisis una cola derecha) (7)

Si:  $t_{calc.} < -t_{\alpha, n-1} \rightarrow$  existe una probabilidad “ $1 - \alpha$ ”, que  $\mu_0 < \mu$  (análisis una cola izquierda) (8)

Donde:

$$t_{calc.} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad (9)$$

## 3.5.2 Contraste entre dos parámetros obtenidos experimentalmente.

HIPÓTESIS NULA “H<sub>0</sub>”

$$\mu_1 = \mu_2$$

Donde:

$\mu_1$  : es la media inferida del primer parámetro  $\bar{X}_1$  obtenida del experimento

$\mu_2$  : es la media inferida del segundo parámetro  $\bar{X}_2$  obtenida del experimento

HIPÓTESIS ALTERNATIVA “H<sub>1</sub>”

Prueba bilateral o de dos colas:  $\mu_1 \neq \mu_2$  (diferencia entre ambos)

Prueba unilateral o de una cola:  $\mu_1 > \mu_2$  (parámetro 1 mayor que parámetro 2)

Prueba unilateral o de una cola:  $\mu_1 < \mu_2$  (parámetro 1 menor que parámetro 2)

RECHAZO DE LA H<sub>0</sub>

Si:  $|t_{calc.}| > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \rightarrow \mu_0$  y  $\mu$  tienen una probabilidad “ $1 - \alpha$ ” de ser diferentes (análisis dos colas) (10)

Si:  $t_{calc.} > t_{\alpha, n_1+n_2-2} \rightarrow$  existe una probabilidad “ $1 - \alpha$ ”, que  $\mu_1 > \mu_2$  (análisis una cola derecha) (11)

Si:  $t_{calc.} < -t_{\alpha, n_1+n_2-2} \rightarrow$  existe una probabilidad “ $1 - \alpha$ ”, que  $\mu_1 < \mu_2$  (análisis una cola izquierda) (12)

Donde:

$$t_o = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad (13)$$

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (14)$$

El empleo de las ecuaciones (13) y (14) bajo la consideración de que  $s_1$  y  $s_2$  son estadísticamente similares.

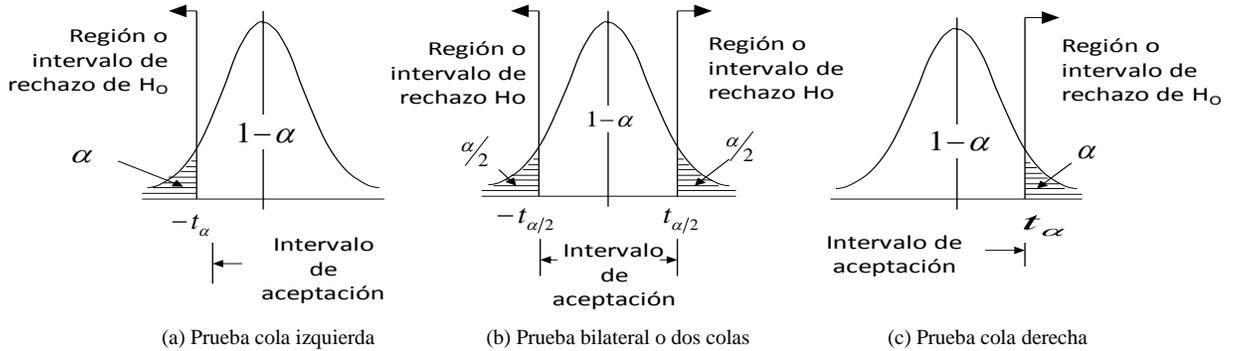


figura (4): Representación gráfica de las pruebas de hipótesis

**3.6 Selección del “t” crítico:** El “t” crítico, es aquel que se obtiene de tablas en función de “α” y “v”, por ese motivo se lo denota como:  $t_{\alpha/2, v}$  o  $t_{\alpha, v}$  para análisis bilateral y unilateral respectivamente, definen cuán riguroso desea el investigador manejar el nivel de probabilidad de rechazar la hipótesis nula “Ho” siendo ésta verdadera. Ese nivel está determinado por “α” conocida por “significancia”.

CUÁN SIGNIFICATIVA sea una validación de Ho dependerá de cuánto “α” escoge el investigador, en la figura 5 se muestran algunos:

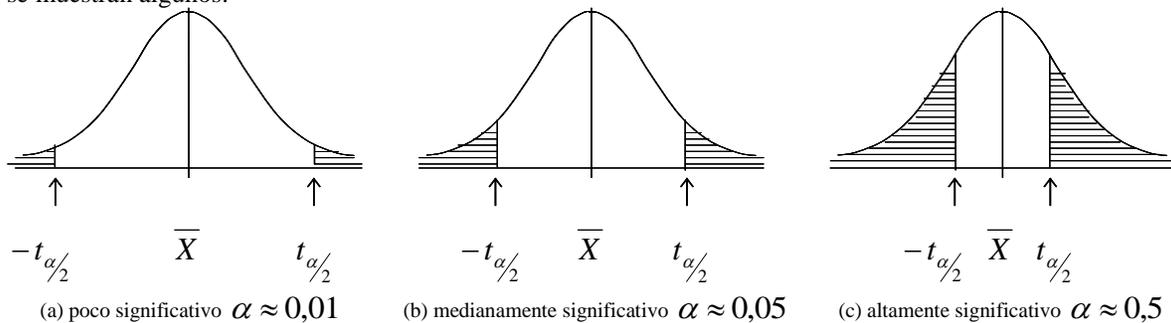


figura 5: Diferentes niveles de significancia escogidos por el investigador

Si se escoge por ejemplo  $\alpha = 0,01$ , la aceptación de Ho será menos significativa que si se escogiera  $\alpha = 0,5$ ; pues la zona de NO RECHAZO en el último caso es menor (figura 5-c).

Las prácticas de la presente guía buscan aceptar la hipótesis nula para validar algún modelo de la teoría. Para el efecto, cuando los laboratorios disponen de equipo apropiado escogen  $\alpha/2 = 0,05$  (Nivel de Confianza 90% dos colas) .Sin embargo, si en laboratorio no se cuenta con buen equipo de experimentación los errores gruesos y sistemáticos tienden a ser considerables, en dicho caso es preferible emplear un  $\alpha/2 = 0,005$  (Nivel de Confianza 99% dos colas), así es más probable aceptar la Ho aunque esta aceptación sea menos significativa.

En cambio, en trabajos de investigación aplicada a procesos tecnológicos, lo que se quiere es rechazar la hipótesis nula para mostrar que por ejemplo un proceso nuevo es diferente del anterior. En ese caso, mientras más pequeño sea  $\alpha$ , más contundente el rechazo de la hipótesis nula.

EJEMPLO 1: La ecuación de Jolly para encontrar la densidad de un cuerpo al cual se lo sostiene mediante un resorte

al sumergirlo en agua está dada por: 
$$\rho_C = \frac{X_1}{(X_1 - X_2)} \cdot \rho_{H_2O} \quad (15);$$

donde:  $X_1$  es la elongación del resorte cuando el cuerpo no se sumerge en agua,

$X_2$  es la elongación del resorte cuando el cuerpo se sumerge en agua.

Si desea más detalles sobre este experimento, remítase al capítulo de la práctica Balanza de Jolly

Para validar la ecuación 15, un grupo de diez estudiantes consigue un cuerpo de hierro con densidad conocida de  $7800 \text{ kg/m}^3$  y procede a colgarlo de un resorte lineal. Los datos obtenidos por cada uno de los estudiantes se reflejan en la tabla 1, indicar si la ecuación 15 de Jolly ha sido validada por los estudiantes.

Nº medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_1 [cm]$	11,6	11,5	11,5	11,6	11,5	11,7	12,0	11,5	11,5	11,7
$X_2 [cm]$	10,0	9,90	10,3	9,6	10,4	10,0	10,0	10,0	10,1	9,9

tabla 1: Resultados del experimento ejemplo 1

Debe aplicarse; “Contraste entre un parámetro obtenido experimentalmente con uno referencial” véase 3.5.1.

Como la determinación de  $\rho_C$  es indirecta, pues se la obtiene a partir de  $X_1$  y  $X_2$ , entonces debe aplicarse

Propagación de errores. En el capítulo de Balanza de Jolly se muestra como se obtiene la propagación de  $\rho_C$ , que

es: 
$$\rho_C = \bar{\rho} \pm E_{\rho} = \bar{\rho}_C \pm \bar{\rho}_C \left[ \frac{E_{X_1}}{\bar{X}_1} + \frac{(E_{X_1} + E_{X_2})}{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} \right]; \quad (16); \quad \text{donde:}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_{X_1}} X_i}{n_{X_1}}; \quad \bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_{X_2}} X_i}{n_{X_2}}; \quad \bar{\rho}_C = \left( \frac{\bar{X}_1}{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} \right) \rho_{H_2O}; \quad E_{X_1} = t_{\alpha/2;v} \cdot \frac{S_{X_1}}{\sqrt{n_{X_1}}}; \quad E_{X_2} = t_{\alpha/2;v} \cdot \frac{S_{X_2}}{\sqrt{n_{X_2}}} \quad (17)$$

el  $t_{\alpha/2;v}$  o “T de tabla” se obtiene de acuerdo a la significancia que se desea emplear; dígame por ejemplo:

- i)  $t_{\alpha/2;v} = t_{0,05;(10-1)}$  para un nivel de confianza del 90 % bilateral ( $\alpha = 0,1$  o sea  $\alpha/2 = 0,05$ )

Empleando la tabla:

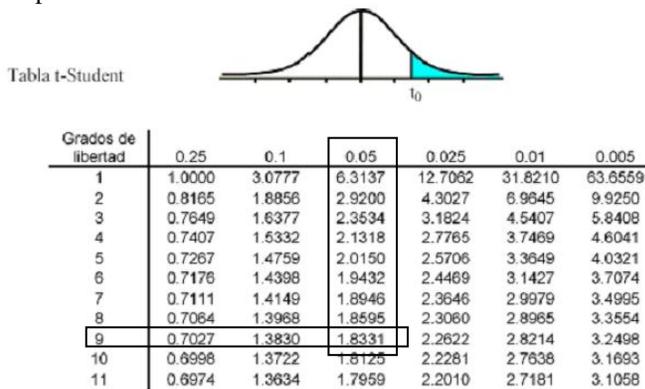


figura 6: Manejo tabla T de Student

Empleando software (EXCEL), la función: =DISTR.T.INV(0,1;9); que da: 1,83311292...  
 O sea,  $t_{0,05;9} = 1,8331$  es el T crítico.

A continuación se procede a encontrar el T calculado con la ecuación (9):  $t_{calc.} = \frac{\bar{X} - \mu_o}{s/\sqrt{n}}$

Debido a que se aplicó propagación de errores, el valor de “s” de la ecuación (9) se obtiene a partir de:

$$E_{\rho} = t_{\alpha/2;v} \cdot \frac{s_{\rho}}{\sqrt{n_{\rho}}}; \text{ despejando } s_{\rho}, \text{ se tiene: } s_{\rho} = \frac{E_{\rho} \sqrt{n_{\rho}}}{t_{\alpha/2;v}} \quad (18)$$

Ahora reemplazando valores numéricos en el conjunto de ecuaciones (17), se obtienen:

$$\bar{X}_1 = 0,1161[m] \quad ; \quad \bar{X}_2 = 0,1002[m] \quad ; \quad E_{X1} = 0,00092467[m] \quad ; \quad E_{X2} = 0,0012759[m] \quad ;$$

$$\bar{\rho}_c = 7301,88679 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$$

$$\text{Calculando } E_{\rho} \text{ de la ecuación (16); } E_{\rho} = \bar{\rho}_c \left[ \frac{E_{X1}}{\bar{X}_1} + \frac{(E_{X1} + E_{X2})}{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} \right] = 1068,73257 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]$$

Por tanto, la densidad del cuerpo obtenido experimentalmente estará en el intervalo:

$$\rho_c = 7301,88679 \pm 1068,73257 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right], \text{ dependiendo del número de cifras significativas que se estén}$$

considerando de acuerdo a la resolución de los instrumentos de medida empleados, se procede al redondeo.  
 A continuación se determina  $s_{\rho}$  a partir de la ecuación (18):

$$s_{\rho} = \frac{E_{\rho} \sqrt{n_{\rho}}}{t_{\alpha/2;v}} = \frac{1068,73257 \sqrt{10}}{1,8331} = 1843,65572 \quad ; \text{ a continuación se determina el valor del T-calculado:}$$

$$t_{calc.} = \frac{\bar{\rho} - 7800 \left[ \frac{Kg}{m^3} \right]}{s_{\rho} / \sqrt{n_{\rho}}} = \frac{7301,88679 - 7800}{1843,65572 / \sqrt{10}} \Rightarrow t_{calc.} = -0,85437441$$

➔ No olvide que  $7800 \text{ Kg/m}^3$  es el valor referencial o verdadero de la densidad del cuerpo de prueba.

Se cumple que:  $|t_{calc.}| < t_{\alpha/2;v}$  ,  $(0,8544 < 1,8331)$  es decir que no se rechaza la hipótesis nula según ecuación (6).  
 Nótese que el mismo ejercicio se puede realizar en hojas electrónicas como se muestra en las siguientes figuras:

	A	B	C
1	n	X1	X2
2	1	0,116	0,1
3	2	0,115	0,099
4	3	0,115	0,103
5	4	0,116	0,096
6	5	0,115	0,104
7	6	0,117	0,1
8	7	0,12	0,1
9	8	0,115	0,1
10	9	0,115	0,101
11	10	0,117	0,099
12	N	10	10
13	Promedio	0,1161	0,1002
14	Desvest	0,00159513	0,002201
15	prom_densidad	7301,88679	
16	alfa	0,1	0,1
17	grados_lib	9	9
18	T Student Tabla	1,83311292	1,8331129
19	E_X1 : E_X2	0,00092467	0,0012759
20	E_densidad	1068,73257	
21	Desvest_densid	1843,65572	
22	T Student Calc.	0,85437441	
23	valor-p	0,41505989	

figura (7): Resultados en tabla EXCEL

	A	B	C
1	n	X1	X2
2	1	0,116	0,1
3	=A2+1	0,115	0,099
4	=A3+1	0,115	0,103
5	=A4+1	0,116	0,096
6	=A5+1	0,115	0,104
7	=A6+1	0,117	0,1
8	=A7+1	0,12	0,1
9	=A8+1	0,115	0,1
10	=A9+1	0,115	0,101
11	=A10+1	0,117	0,099
12	N	=CONTAR(B2:B11)	=CONTAR(C2:C11)
13	Promedio	=PROMEDIO(B2:B11)	=PROMEDIO(C2:C11)
14	Desvest	=DESVEST(B2:B11)	=DESVEST(C2:C11)
15	prom_densidad	=B13*1000/(B13-C13)	
16	alfa	0,1	=B16
17	grados_lib	=B12-1	=C12-1
18	T Student Tabla	=DISTR.T.INV(B16;B17)	=DISTR.T.INV(C16;C17)
19	E_X1 : E_X2	=B18*B14/RAIZ(B12)	=C18*C14/RAIZ(C12)
20	E_densidad	=(B15*((B19/B13)+((B19+C19)/B18))	
21	Desvest_densid	=B20*RAIZ(B12)/B18	
22	T Student Calc.	=(7800-B15)*RAIZ(B12)/B21	
23	valor-p	=DISTR.T(B22;B17;2)	

figura (8): Edición de fórmulas empleadas en EXCEL

ii)  $t_{\alpha/2;v} = t_{0,005;(10-1)}$  para un nivel de confianza del 99 % bilateral ( $\alpha = 0,01$  o sea  $\alpha/2 = 0,005$ ).

Recurriendo nuevamente a la hoja electrónica, se encuentra inmediatamente el nuevo T de Tabla:

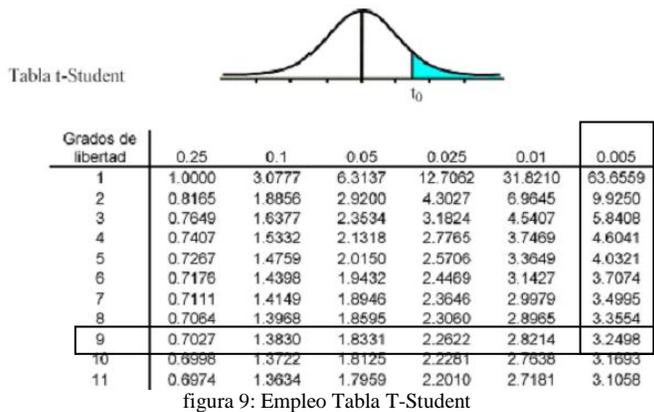


figura 9: Empleo Tabla T-Student

Con el Excel se obtiene: 3,24983554 como se muestra en la figura 10.

	A	B	C
1	n	X1	X2
2	1	0,116	0,1
3	2	0,115	0,099
4	3	0,115	0,103
5	4	0,116	0,096
6	5	0,115	0,104
7	6	0,117	0,1
8	7	0,12	0,1
9	8	0,115	0,1
10	9	0,115	0,101
11	10	0,117	0,099
12	N	10	10
13	Promedio	0,1161	0,1002
14	Desvest	0,00159513	0,002201
15	prom_densidad	7301,88679	
16	alfa	0,01	0,01
17	grados_lib	9	9
18	T Student Tabla	3,24983554	3,2498355
19	E_X1 : E_X2	0,0016393	0,002262
20	E_densidad	1894,70328	
21	Desvest_densid	1843,65572	
22	T Student Calc.	0,85437441	
23	valor-p	0,41505989	

figura 10: Calculando en el EXCEL

Ahora se cumple que:  $|t_{calc}| < t_{\alpha/2;v}$  ( $0,8544 < 3,2498$ ); es decir que no se rechaza la hipótesis nula. Como se había indicado anteriormente, se verifica que es más fácil validar una hipótesis nula con una significancia " $\alpha$ " pequeña, ya que ahora existe mayor diferencia  $0,8544 < 3,2498$  con  $\alpha = 0,01$  en vez de  $0,8544 < 1,8331$  con  $\alpha = 0,1$ .

Recuérdese por lo tanto, que cuando se rechaza una hipótesis nula con significancia " $\alpha$ " pequeña (próxima a cero), entonces este rechazo es contundente.

De modo general, para el ejemplo se obtiene la siguiente tabla con diferentes niveles de significancia:

$\alpha/2$	$0,5/2 = 0,25$	$0,2/2 = 0,1$	$0,1/2 = 0,05$	$0,05/2 = 0,025$	$0,01/2 = 0,005$
$t_{\alpha/2;v=9}$	0,7027	1,3830	1,833	2,2621	3,2498
$E_{\rho}$	409,69	806,32	1068,73	1318,87	1894,70
Intervalo Aceptación de $H_0$	Intervalo 6892,19-7711,57	Intervalo 6495,56-8108,20	Intervalo 6233,15-8370,61	Intervalo 5983,01-8620,75	Intervalo 5407,18-9196,58
Intervalo de rechazo de $H_0$	Menor a 6892,19 Mayor a 7711,57	Menor a 6495,56 Mayor a 8108,20	Menor a 6233,15 Mayor a 8370,61	Menor a 5983,01 Mayor a 8620,75	Menor a 5407,18 Mayor a 9196,58

tabla 2: Resumen de intervalos de confianza para el ejemplo 1

➔ En el Experimento “Balanza de Jolly” se empleará “Contraste entre dos parámetros obtenidos experimentalmente” (3.5.2) en vez de “Contraste entre un parámetro obtenido experimentalmente con uno referencial o teórico” (3.5.1) que se utilizó en este ejemplo porque no se será conocido el valor supuesto de la densidad del cuerpo.

3.7 El *valor-p* (*p-value*): En el ejemplo anterior se validó la hipótesis nula  $H_0$ , primeramente con significancia  $\alpha/2 = 0,05$  y posteriormente (con más facilidad) para  $\alpha/2 = 0,005$ . Pero la interrogante es:

¿Con qué valor de  $\alpha/2$  ya no se valida la  $H_0$ ? (rechazo de  $H_0$ )

Si se ven los resultados del ejemplo anterior (tabla 2),  $\alpha/2$  debe ser algo mayor que  $\alpha/2 = 0,05$  para que se cumpla  $|t_{calc}| = t_{\alpha/2;n-1}$ , pero resulta difícil indicar; cuánto más debe escogerse  $t_{\alpha/2;n-1}$  porque las tablas T-Student convencionales no muestran intervalos pequeños de  $\alpha/2$ , por lo que no es recomendable aplicar interpolación.

⇒ El valor de “ $\alpha$ ”, que hace cumplir la igualdad  $|t_{calc}| = t_{\alpha/2;v}(\text{bilateral})$  o  $|t_{calc}| = t_{\alpha;v}$  (unilateral) se conoce como *valor-p* o *p-value* (inglés).

Existen muchos programas computacionales que calculan el *p-value*, por ejemplo en el EXCEL con su función estadística: = DISTR.T(x;grados\_de\_libertad;colas); donde “x” representa el  $|t_{calc}|$ .

Las figuras 7,8 y 10 muestran la determinación del *p-value* del ejercicio del ejemplo anterior, con la fórmula =DISTR.T(0,8543;9;2) y cuyo resultado es: *p-value* = 0,41; o sea *p/2 value* = 0,205 (bilateral).

Tal resultado se verifica por aproximación en la tabla 2 o tabla T-Student;  $\alpha/2 = 0,205$  corresponde a:  $|t_{calc}| = 0,8543...$  que es el crítico.

En general:

➤ Al hacerse el *p/2 value* más pequeño de 0,05 entonces más contundentemente se descarta la  $H_0$

**3.8 Regresión lineal:** El análisis de regresión tiene como objetivo modelar en forma matemática el comportamiento de una variable de respuesta o dependiente en función de una o más variables independientes (factores). Si el comportamiento es lineal, de la forma:  $y = a + b \cdot x$ ; entonces “y” es la variable dependiente de la variable “x” independiente, “a” representa el corte en la ordenada y “b” la pendiente.

$$a = \frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i Y_i)}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (19)$$

$$b = \frac{n(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \quad (20)$$

**EJEMPLO 2:** Comprobar la hipótesis de Hooke: *la deformación en un resorte es proporcional a la fuerza que la produce, siempre y cuando ésta no sea demasiado grande.* Para el efecto se selecciona un resorte con escala graduada, del que se cuelgan pesos patrón, obteniéndose los valores mostrados en la tabla 3.

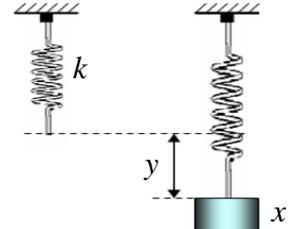


figura 11: Ley de Hooke

$x [N]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y [mm]$	11	18	29	39	48	60	73	79	87	99

tabla 3: Datos obtenidos deformación versus peso suspendido

Haciendo uso de algún graficador o del EXCEL con el asistente de gráficos xy (dispersión), se obtiene la representación de la figura 12.

En las abscisas (eje x) se suele representar la variable independiente, para el ejemplo el peso de la carga en [N]. En las ordenadas (eje y) la variable dependiente, para el ejemplo la deformación medida en [mm]. A continuación se encuentran los valores del corte en la ordenada “a” y pendiente de la recta “b”

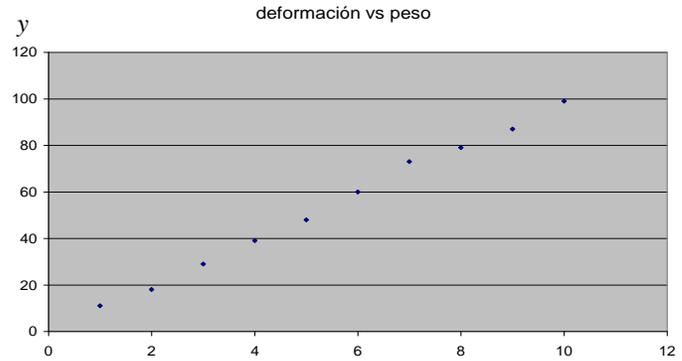


figura 12: representación de la deformación vs peso

La tabla 4 muestra los resultados obtenidos haciendo uso de las funciones del EXCEL

$n$	CONTARA (eje x)	10,0000
$b$	PENDIENTE (ejes x; y)	9,9333
$a$	INTERSECCION.EJE (ejes x; y)	-0,3333
$r$	COEF.DE.CORREL (ejes x; y)	0,9984
$S_{x/y}$	ERROR.TIPICO.XY (ejes x; y)	1,7935
$S_{xx}$	DESVMIA2(eje x)	82,5000
$S_b$	ERROR.TIPICO.XY/RAIZ(DESVMIA2(eje x))	0,1975
$x^2$	SUMA.CUADRADOS (eje x)	385,0000
$S_a$	ERROR.TIPICO.XY(ejes x; y) *RAIZ(SUMA.CUADRADOS(eje x) / (CONTARA * DESVMIA2 (eje x))	1,2252

tabla 4: Tabla de parámetros obtenidos en el EXCEL

Por tanto, la ecuación de la recta es:  $y = -0,3333 + 9,9333x$  El mismo resultado se obtendría con las ecuaciones 19 y 20.

3.8.1 Pruebas de hipótesis en regresión lineal

a) El corte en el eje de las ordenadas es igual a: CERO

$$\text{HIPÓTESIS NULA } H_0: a = a_o \rightarrow t_{\alpha/2, n-2} > t_{calc.}$$

$$\text{HIPÓTESIS ALTERNATIVA } H_1: a \neq a_o \text{ (dos colas)} \rightarrow t_{\alpha/2, n-2} < t_{calc.}$$

$$t_{calc.} = \frac{|a - a_o|}{S_a} = \frac{|-0,3333 - 0|}{1,2252} = 0,2720$$

Para una significancia de  $\alpha/2 = 0,05$  y 10 lecturas (8 grados de libertad) “ $t_{\alpha/2, n-2} = t_{0,05;8} = 1,8595$

Se comprueba que:  $t_{0,05;8} > t_{calc.} \rightarrow$  NO SE RECHAZA LA HIPÓTESIS NULA (significancia  $\alpha/2 = 0,05$ )

Nótese que inclusive para una significancia  $\alpha/2 = 0,25$  no se rechaza  $H_0$ , es decir el *valor-p* es alto.

b) La pendiente de la recta es igual a: DIEZ

$$\text{HIPÓTESIS NULA } H_0: b = b_o \rightarrow t_{\alpha/2, n-2} > t_{calc.}$$

$$\text{HIPÓTESIS ALTERNATIVA } H_1: b \neq b_o \text{ (dos colas)} \rightarrow t_{\alpha/2, n-2} < t_{calc.}$$

$$t_{calc.} = \frac{|b - b_o|}{S_b} = \frac{|9,9333 - 10|}{0,1975} = 0,3377$$

Para una significancia de  $\alpha/2 = 0,05$  y 10 lecturas “ $t_{tabla} = t_{\alpha/2, n-2} = t_{0,05;8} = 1,8595$

Se comprueba que:  $t_{0,05;8} > t_{calc.} \rightarrow$  NO SE RECHAZA LA HIPÓTESIS NULA (significancia  $\alpha/2 = 0,05$ )

Nótese que inclusive para una significancia  $\alpha/2 = 0,25$  no se rechaza  $H_0$ , es decir el *valor-p* es alto.

El valor de  $b$  representa al inverso de la constante de elasticidad del resorte  $k$ , por tanto:  $k = \frac{1}{10} \left[ \frac{N}{mm} \right]$

3.8.2 Coeficiente de correlación lineal

$$r = \frac{n \sum X_i Y_i - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{\sqrt{[n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2] \cdot [n \sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2]}}$$

Se puede ver que  $-1 \leq r \leq 1$ ;

Si  $r$  es próximo a -1, entonces se tiene una relación lineal negativa fuerte (pendiente negativa)

Si  $r$  es próximo a cero, entonces se dice que no hay relación lineal

Si  $r$  es próximo a +1, entonces se tiene una relación lineal positiva fuerte (pendiente positiva)

### CUESTIONARIO

1. Explique ¿por qué existe variabilidad en los resultados obtenidos de un experimento?
2. En un estudio estadístico, ¿qué es una población y para qué se toma una muestra?
3. ¿Qué es probar una hipótesis?
4. ¿En qué situaciones, se considera que las dos distribuciones, la Normal y T de Student se hacen prácticamente iguales?
5. Explique la interpretación de  $\sigma = \frac{S}{\sqrt{n}}$
6. Indique, ¿en qué situaciones se hacen pruebas de hipótesis de una cola y en cuáles de dos colas?
7. ¿Cuáles son los valores: mínimo y máximo posibles para el  $t_{calc.}$ ?, ¿en qué situaciones se dan?
8. Indique, ¿en qué criterio se fundamenta para escoger pruebas de hipótesis con alto o bajo nivel de significancia?
9. ¿En qué situaciones es conveniente emplear regresión lineal?
10. Indique ¿qué es el *valor-p*, entre que valores fluctúa?

## BALANZA DE JOLLY

### 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

#### 1.1 INTRODUCCIÓN

La densidad es una de las propiedades más importantes de un cuerpo, la determinación de la misma se consigue por su definición, es decir a través de la medida de su masa y su volumen para reemplazar luego en:  $\rho = m/V$ . La masa se obtiene de pesar el cuerpo y aplicando:  $m = W/g$ , el volumen se encuentra a través de sus medidas geométricas o sumergiendo el cuerpo en un recipiente con agua y regulación que permita medir el volumen desplazado. Por otra parte, es posible determinar si la densidad de un cuerpo es mayor o menor que la de un fluido, en función de, si el mismo se hunde o flota en él. En el presente experimento, se investigará la Balanza de Jolly, un método alternativo para medir la densidad de un cuerpo cuya densidad es mayor que la del agua.

#### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

**PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES:** Debido a la fuerza gravitatoria de la tierra, los fluidos ejercen una presión perpendicular sobre los cuerpos como se muestra en la figura 1 con las flechas finas. Esta presión está en función de la profundidad y la densidad del fluido, entonces como la presión que ejerce el fluido sobre el cuerpo es mayor en la proximidad de su base, se obtiene una fuerza resultante sobre el cuerpo dirigida hacia arriba tal como se representa por la flecha gruesa, esta fuerza es conocida como EMPUJE “E” o fuerza de Arquímedes en honor al matemático griego que enunció dicho principio.

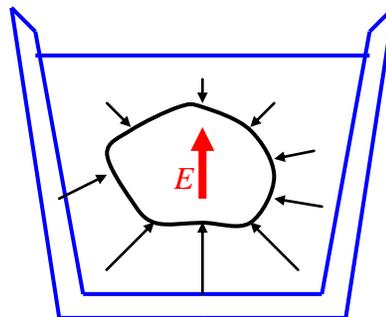


figura 1: el empuje que produce un fluido

El valor del empuje está dado por:  $E = \rho_L \times g \times V_d$  (1)

Donde:

$E$  : Fuerza de empuje en [N].

$\rho_L$  : Densidad del fluido en [ $\text{Kg}/\text{m}^3$ ], en el experimento se usará agua.

$g$  : Constante de gravedad en [ $\text{m}/\text{s}^2$ ] correspondiente al lugar donde se realiza el experimento.

$V_d$  : Volumen de la parte sumergida del cuerpo o el volumen desplazado por el mismo en [ $\text{m}^3$ ], en el experimento se emplearán cuerpos más densos que el agua, por lo que se hundirán completamente, entonces el volumen sumergido coincidirá con el del cuerpo.

**FUERZA RESTAURADORA:** Los cuerpos elásticos tienen la propiedad de ejercer una fuerza de oposición a una fuerza externa que tienda a deformarlos, misma que es proporcional a la variación de su longitud y material.

Para resortes, se cumple la Ley de Hooke:  $F_r = k \times X_1$  (2)

Donde:

$F_r$  : Fuerza restauradora en [N].

$k$  : Constante de restitución del resorte en [N/m].

$X_1$  : Deformación del resorte en [m] debida a una fuerza externa, en la figura 2 (b) la fuerza externa es proporcionada por un peso.

Análisis del comportamiento

En el estado:

- (a) El resorte sin deformación no ejerce ninguna fuerza.
- (b) Al aplicarse la fuerza externa a través del peso del cuerpo, el resorte se deforma elásticamente realizando de esa forma una fuerza restauradora según la ecuación (3), ver figura 3
- (c) Al sumergirse completamente el cuerpo en el recipiente con agua, se manifiesta además de la fuerza debida al peso del cuerpo y restauradora debida al resorte; la fuerza de empuje debida a la presión del agua en el recipiente, como se muestra en la figura 4 y sus correspondientes ecuaciones.

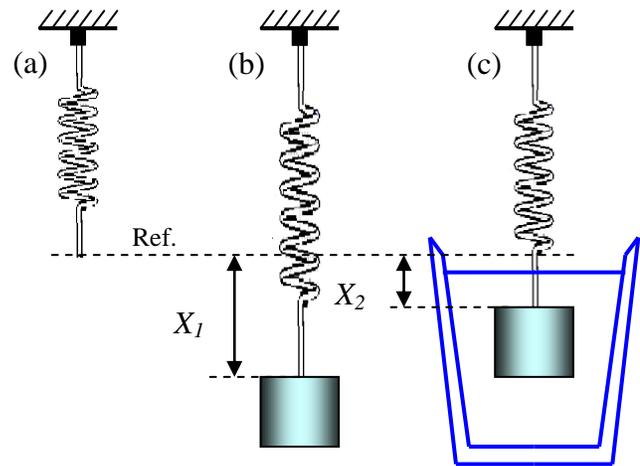


figura 2: Representación de los estados (a), (b) y (c)

Con el cuerpo suspendido del resorte, figura 2 (b):

- $W$  : peso del cuerpo
- $F_{r1}$  : fuerza restauradora del resorte con el cuerpo suspendido
- $k$  : constante de restitución del resorte
- $X_1$  : elongación del resorte con el cuerpo suspendido del resorte

Cuando el cuerpo está en reposo:

$$W = F_{r1} \quad (3)$$

$$F_{r1} = k \times X_1 \quad (4)$$

reemplazando (4) en (3) 
$$W = k \times X_1 \quad (5)$$

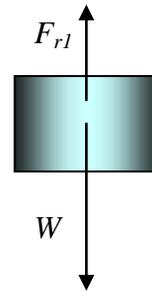


figura 3: análisis de cuerpo libre en (b)

Con el cuerpo suspendido del resorte y sumergido en el fluido, figura 2 (c):

- $W$  : peso del cuerpo
- $F_{r2}$  : fuerza restauradora del resorte con el cuerpo sumergido en el fluido.
- $X_2$  : Elongación del resorte con el cuerpo suspendido del resorte y sumergido en el recipiente con agua.
- $E$  : Empuje

Cuando el cuerpo está en reposo:

$$W = F_{r2} + E \quad (6)$$

$$F_{r2} = k \times X_2 \quad (7)$$

(5) y (7) en (6) da: 
$$E = k \times (X_1 - X_2) \quad (8)$$

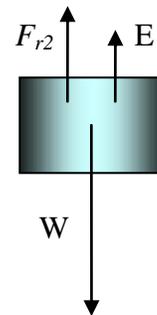


figura 4: análisis de cuerpo libre en (c)

La densidad relativa “ $\rho_r$ ” mide la relación de densidad de un cuerpo respecto a la de otro que normalmente

es el agua, así la densidad relativa del cuerpo respecto a la del agua será: 
$$\rho_r = \frac{\rho_c}{\rho_L} \quad (9)$$

Donde:  $\rho_C$  es la densidad del cuerpo y  $\rho_L$  es la densidad del líquido, en el experimento agua.  
 Al multiplicar la constante  $g$  y  $V_C$  al numerador y denominador de la ecuación (9), obteniéndose:

$$\rho_r = \frac{\rho_C \cdot g \cdot V}{\rho_L \cdot g \cdot V} = \frac{W}{E} \quad (10)$$

Al reemplazar (5) y (8) en (10), se tiene:  $\rho_r = \frac{X_1}{(X_1 - X_2)}$  (11), de las ecuaciones (9) y (11):

$$\rho_C = \rho_L \cdot \frac{X_1}{(X_1 - X_2)} \quad (12)$$

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Siendo:

$\rho_C$  la densidad del cuerpo encontrada experimentalmente con el método de la Balanza de Jolly,

$\rho_C^*$  la densidad del cuerpo encontrada experimentalmente con  $\rho = m/V$  de la definición

Hipótesis nula  $H_0$ :  $\rho_C = \rho_C^*$

Hipótesis alternativa  $H_1$ :  $\rho_C \neq \rho_C^*$  Bilateral o de dos colas

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t_{calculado} < t_{de\ tablas}$ .

En contraposición se rechaza  $H_0$ , es decir la determinación de la densidad del cuerpo por el método de la Balanza de Jolly no es válida o el procedimiento presentó error sistemático o grueso. Se sugiere una significancia  $\alpha/2 = 0,05$  (90% nivel de confianza) si los equipos a emplear son confiables; de lo contrario, si los equipos no son muy confiables, es factible optar por una validación menos significativa con  $\alpha/2 = 0,005$  (99% N.C.).

### 1.4 OBJETIVOS

- Encontrar la densidad del cuerpo sólido por el método de la definición.
- Validar la Balanza de Jolly como método alternativo para determinar la densidad de un cuerpo sólido cuyo valor sea mayor que la del agua.

### 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

#### 1.5.1 MATERIALES Y EQUIPO

- Resorte
- Prensa (para sostener el resorte a un soporte)
- Recipientes con agua
- Regla y escuadra
- Vernier o tornillo micrométrico
- Cuerpo de acero u otro metal de geometría regular
- Hilo de nylon N° 60

- Balanza

### 1.5.2 DETERMINACIÓN DE LA DENSIDAD DEL CUERPO CON LA ECUACIÓN DE LA DEFINICIÓN.

1. Elegir un cuerpo con densidad mayor a la del agua, por ejemplo un bloque de acero.
2. Identificar las medidas necesarias para definir el volumen del mismo, si éste presentara perforaciones, también deberán considerarse.
3. Cada estudiante componente del grupo deberá obtener al menos un conjunto de medidas que permita obtener el volumen del cuerpo.
4. Pesarse el cuerpo, si la balanza es digital bastará con tomar una sola lectura, debe recordarse que la balanza mide el peso y no la masa del cuerpo.

### 1.5.3 DETERMINACIÓN DE LA DENSIDAD DEL CUERPO CON LA BALANZA DE JOLLY

1. Verificar que el resorte tenga comportamiento lineal ( $X_l$  debida a un peso  $W$ , cambia a  $2X_l$  debida a  $2W$ ), algunos resortes presentan tensión de compresión sin aplicación de carga (no se pueden comprimir), en cuyo caso debe colocarse un peso de precarga para aliviar dicha tensión. Debe constatarse también que el peso no rebase el límite de elasticidad del resorte.
2. Armar la sujeción del resorte con una regla graduada colocada en posición vertical, puede ayudarse de una plomada.
3. Marcar el nivel de referencia en el extremo inferior del resorte sin la carga del cuerpo principal.
4. Colgar el cuerpo de un hilo inextensible del resorte y medir  $X_l$ , figura 2 (b).
5. Cada estudiante componente del grupo deberá realizar esta operación para obtener varias medidas de  $X_l$
6. Llenar un recipiente con agua verificando que el cuerpo pueda sumergirse completamente
7. Introducir el cuerpo dentro del recipiente, cuidando que el peso de precarga (si se lo hubiese colocado) no se introduzca dentro del recipiente. Debe constatarse que el cuerpo quede completamente sumergido en el agua y no choque con ningún lado de las paredes del recipiente.
8. Medir  $X_2$  según figura 2 (c).
9. Cada estudiante componente del grupo deberá realizar esta operación para obtener varias lecturas de  $X_2$

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 CÁLCULOS

DENSIDAD DEL CUERPO SEGÚN LA ECUACIÓN DE LA DEFINICIÓN:  $\rho_C^* = \overline{\rho_C^*} \pm E\rho_C^*$  (13)

Donde  $\overline{\rho_C^*}$  es el valor de la densidad promedio a través de reemplazar los valores del peso y las dimensiones del

volumen en:  $\overline{\rho_C^*} = \frac{\overline{W}}{g \cdot \overline{V}}$  (14)

Para hallar  $E\rho_C^*$  se hace propagación de errores, para ello se considera a los términos de la ecuación (14) como variables y aplicando logaritmo natural a ambos lados;

$$\ln(\rho^*) = \ln\left(\frac{W}{g \cdot V}\right) = \ln(W) - \ln(g) - \ln(V) \quad \text{derivando:}$$

$$\frac{d(\rho^*)}{\rho^*} = \frac{d(W)}{W} - \frac{d(g)}{g} - \frac{d(V)}{V} \quad \text{pero } g \text{ es constante y llevando a la forma de incrementos:}$$

$$\frac{\Delta\rho^*}{\rho^*} = \frac{\Delta W}{W} - \frac{\Delta V}{V} \quad \text{al considerar en la propagación la peor situación, el signo menos cambia a positivo}$$

$$\frac{\Delta\rho^*}{\rho^*} = \frac{\Delta W}{W} + \frac{\Delta V}{V} \quad \text{ó} \quad E\rho_c^* = \bar{\rho}_c^* \left( \frac{E_W}{W} + \frac{E_V}{V} \right) \quad (15)$$

donde:  $E_W = t_{\alpha/2, \nu} \times \frac{s_W}{\sqrt{n_W}}$ ; si el peso se obtiene con una balanza digital,  $s_W$  es la resolución del instrumento y

$n_W$  es dos y  $\nu$  (grados de libertad) es uno.

Una simplificación aceptable será considerar la medida del peso en una balanza digital como una constante, es decir sin error de medida ( $E_W = 0$ ), reemplazando en la ec. (15) se tendría:

$$E\rho_c^* = \bar{\rho}_c^* \left( \frac{E_V}{V} \right) \quad (16)$$

$E_V$  se obtiene de aplicar propagación de errores a la fórmula que describe el volumen del cuerpo escogido, con  $n_V$  mediciones realizadas. Esta práctica se suele hacer en laboratorio de Física I.

→ Se encuentra el valor de  $\rho_c^*$  (densidad obtenida por la definición) reemplazando (14), (15) ó (16) en (13)

DENSIDAD DEL CUERPO SEGÚN BALANZA DE JOLLY:  $\rho_c = \bar{\rho}_c \pm E\rho_c \quad (17)$

Si:  $\rho_L$  la densidad del agua,  $X_1 = \bar{X}_1 \pm E_{X_1}$ ,  $X_2 = \bar{X}_2 \pm E_{X_2}$ , entonces:

$$\bar{\rho}_c = \rho_L \cdot \frac{\bar{X}_1}{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}, \quad (18) \quad \text{para encontrar } E\rho_c \text{ se aplica propagación de errores a la ecuación:}$$

$$\rho_c = \rho_L \cdot \frac{X_1}{(X_1 - X_2)} \quad \text{aplicando logaritmo natural a ambos lados de la ecuación}$$

$$\ln(\rho_c) = \ln\left(\rho_L \frac{X_1}{(X_1 - X_2)}\right)$$

$$\ln(\rho_c) = \ln \rho_L + \ln X_1 - \ln(X_1 - X_2) \quad \text{derivando}$$

$$\frac{d(\rho_c)}{\rho_c} = \frac{d(\rho_L)}{\rho_L} + \frac{d(X_1)}{X_1} - \frac{d(X_1 - X_2)}{(X_1 - X_2)} \quad \text{pero } \rho_L \text{ es constante y en la forma de incrementos:}$$

$$\frac{\Delta\rho_c}{\rho_c} = \frac{\Delta X_1}{X_1} - \frac{\Delta(X_1 - X_2)}{(X_1 - X_2)}$$

$$\frac{\Delta\rho_c}{\rho_c} = \frac{\Delta X_1}{X_1} - \frac{\Delta X_1}{(X_1 - X_2)} + \frac{\Delta X_2}{(X_1 - X_2)} \quad \text{en propagación se considera la peor situación, es decir, el signo - se convierte en + en numeradores}$$

$$\frac{\Delta\rho_c}{\rho_c} = \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{(\Delta X_1 + \Delta X_2)}{(X_1 - X_2)} \quad \text{ó} \quad E\rho_c = \bar{\rho}_c \left[ \frac{E_{X_1}}{X_1} + \frac{(E_{X_1} + E_{X_2})}{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} \right] \quad (19)$$

→ Se encuentra el valor de  $\rho_c$  (densidad obtenida por el método de Jolly) reemplazando (14) y (19) en (17)

## 2.2 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Prueba t de Student para comparación de dos parámetros, suponiendo  $s_1 \cong s_2$  :

$$t_{\text{calculado}} = \frac{\overline{\rho_C^*} - \overline{\rho_C}}{s_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{donde: } s_P = \sqrt{\frac{[(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2]}{(n_1 + n_2 - 2)}}$$

Donde:

$\overline{\rho_C^*}$  : Densidad media obtenida por la definición en la primera parte del experimento.

$\overline{\rho_C}$  : Densidad media obtenida por el método de la Balanza de Jolly.

$s_P$  : Desviación estándar ponderada de los dos grupos.

$n_1$  : Número de medidas realizadas al volumen del cuerpo en la primera parte del experimento.

$n_2$  : Número de medidas realizadas en la segunda parte del experimento.

$s_1^2$  : Varianza obtenida en la primera parte del experimento.

$s_2^2$  : Varianza obtenida en la segunda parte del experimento.

$s_1^2$  y  $s_2^2$  se obtienen a partir de usar la fórmula:  $E = t_{\alpha/2} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$  es decir;  $s_1 = \frac{E\rho_C^* \times \sqrt{n_1}}{t_{\alpha/2}}$  donde:

$E\rho_C^*$  se obtiene de la propagación de errores realizada en la primera parte.

$n_1$  es el menor número de medidas realizada para la obtención del volumen del cuerpo.

$\alpha/2$  se recomienda emplear  $\alpha/2 = 0,005$  (nivel de confianza del 99% de dos colas).

Recuérdese que al incrementar el nivel de confianza, el error de medición “ $E$ ” también sube. Ello refleja la condición poco confiable de los instrumentos de medida que se están empleando en laboratorio de FIS 102. En suma, al incrementar el nivel de confianza ej. 99%, entonces existe mayor probabilidad de validar la hipótesis nula, pero en contraposición los resultados son “menos significativos”.

$t_{\alpha/2}$  se obtiene de la tabla de Student para:  $\alpha/2 = 0,005$  y *grados de libertad* =  $n_1 - 1$

$$s_2 = \frac{E\rho_C \times \sqrt{n_2}}{t_{\alpha/2}} \quad \text{donde:}$$

$E\rho_C$  se obtiene de la propagación de errores realizada en la segunda parte.

$n_2$  es el número de medidas realizadas en la segunda parte.

$\alpha/2$  será 0,005 si se escoge un nivel de confianza del 99% de dos colas.

$t_{\alpha/2}$  se obtiene de la tabla de Student para  $\alpha/2 = 0,005$  y *grados de libertad* =  $n_2 - 1$

El  $t_{\alpha/2}$  de tabla, se obtiene con  $\nu = n_1 + n_2 - 2$  (grados de libertad) y  $\alpha/2 = 0,05$  (90% nivel de confianza 2 colas) o más pesimista  $\alpha/2 = 0,005$ . Aplicar el criterio de decisión para determinar si se rechaza o no la hipótesis del experimento según se describe en la “formulación de la hipótesis” (acápite 1.3).

## 2.3 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

- 1 ¿Por qué se recomienda sujetar de un hilo inextensible el cuerpo a ser sumergido?, ¿Sería mejor sujetar el cuerpo con gancho o alambre?
- 2 Si colocara una balanza en la base del recipiente del experimento, ¿qué mediría ésta?
- 3 Según las deformaciones obtenidas concluya si la fuerza de empuje o la fuerza de restitución del resorte antes de introducir el cuerpo es mayor.
- 4 Indique si la fuerza restauradora del resorte es mayor cuando el cuerpo está sumergido o sin sumergir.
- 5 En el experimento, ¿cuáles son variables dependientes y cuáles independientes?
- 6 Si se acepta la hipótesis alterna  $H_1$ , siendo que la Balanza de Jolly ha sido validada en laboratorios reconocidos, significa que se cometieron errores sistemáticos y/o graves, ¿podría mencionar las variables o factores que intervinieron para que esté presente este error?
- 7 Si se empleara una significancia " $\alpha$ " menor, ¿existirá mayor probabilidad de no rechazar  $H_0$ ?, explique, ¿por qué se recomienda hacer hipótesis de dos colas en vez de una cola?,
- 8 Explique qué procedimiento experimental y prueba de hipótesis usaría para comprobar que el resorte se comporta según la Ley de Hooke.
- 9 ¿Por qué debe cuidarse que el cuerpo sumergido no choque contra las paredes del recipiente?
- 10 Busque en tablas el valor teórico de  $\rho_C$  para encontrar con qué método se determinó el valor más próximo, ¿cómo aplica prueba de hipótesis en ese caso?

## BALANZA DE JOLLY

ESTUDIANTE:

GRUPO:

FECHA EXPERIMENTO:

VoBo:

### DENSIDAD DEL CUERPO SEGÚN LA ECUACIÓN DE LA DEFINICIÓN

medida directa

medida indirecta

$W(\text{peso del cuerpo}):$

$$m = \frac{W}{g} :$$

n # medida	A	B	C	D	E

$A, B, C, D, E$  son dimensiones del cuerpo que considere relevantes para determinar su volumen y deben estar representadas en la gráfica del cuerpo

Resolución de la balanza (*sólo si usará la ecuación 15 en lugar de la ecuación 16*):  
Representación gráfica del cuerpo:

### DENSIDAD DEL CUERPO SEGÚN BALANZA DE JOLLY

n número de medición								
Variable dependiente desplazamiento $X_{1i}$								
Variable dependiente desplazamiento $X_{2i}$								

Asumidos (constantes)

$g(\text{constante de gravedad en el lugar del experimento}):$

$\rho_L$ (densidad del agua):

NOTA: No olvide en anotar las unidades de las medidas obtenidas.

## VERTEDEROS

### 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

#### 1.1 INTRODUCCIÓN

Los vertederos son estructuras que tienen aplicación muy extendida en todo tipo de sistemas hidráulicos y expresan una condición especial de movimiento no uniforme en un tramo con notoria diferencia de nivel. Normalmente desempeñan funciones de seguridad y control.

Un vertedero puede tener las siguientes misiones:

- Lograr que el nivel de agua en una obra de toma alcance el nivel requerido para el funcionamiento de la obra de conducción.
- Mantener un nivel casi constante aguas arriba de una obra de toma, permitiendo que el flujo sobre el coronamiento del vertedero se desarrolle con una lámina líquida de espesor limitado.
- En una obra de toma, el vertedero se constituye en el órgano de seguridad de mayor importancia, evacuando las aguas en exceso generadas durante los eventos de máximas crecidas.
- Permitir el control del flujo o caudal en estructuras de caída, disipadores de energía, transiciones, estructuras de entrada y salida en alcantarillas de carreteras, sistemas de alcantarillado, etc.

El flujo o caudal “ Q ” está definido por:

$$Q = v \times A = \frac{dV}{dt}, \text{ su unidad en el SI es: } \left[ \frac{m^3}{s} \right].$$

La forma directa de obtener el flujo o caudal real  $Q_r$ , es a través de medir, el tiempo que toma llenar dicho flujo un recipiente de volumen conocido. En el presente experimento, se determinará su relación con el caudal ideal  $Q$ , a través del coeficiente de descarga

$$“C_D”, \text{ tal que: } C_D = \frac{Q_r}{Q}$$



figura 1: vertedero de laboratorio de escotadura triangular

#### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

Clasificación de los vertederos. Los vertederos se clasifican de acuerdo a diversos aspectos:

Según el espesor de la pared:

- vertederos de pared delgada,  $e/h$  menor 0.67 (figura 1)
- vertederos de pared gruesa o de cresta ancha ( $e/h$  mayor o igual 0.67)

Los vertederos de pared delgada sirven para medir caudales con gran precisión, y los de pared gruesa, como integrantes de una presa u otra estructura hidráulica, se utilizan para controlar niveles, aunque también se pueden instrumentar como medidores de caudales.

La exactitud de la medida del caudal exige que el vertedero esté bien ventilado. La ventilación tiene por objeto introducir aire por debajo de la lámina vertiente, para que, por ambas caras de la lámina, actúe la misma presión (atmosférica). La lámina en un vertedero no ventilado crea succión, y es causal de errores en la determinación de caudales.

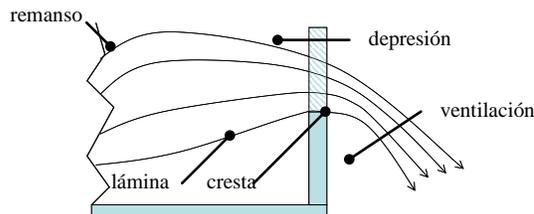
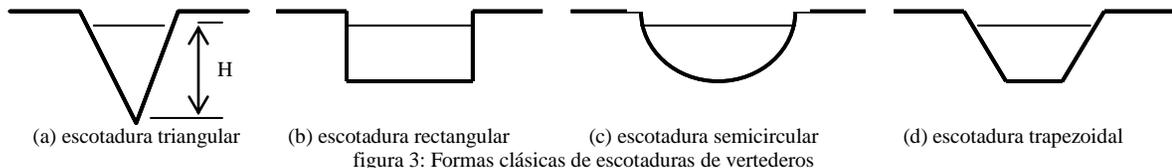


figura 2: Vista de corte de las líneas de flujo

El cálculo del caudal que escurre por un vertedero, puede deducirse para condiciones ideales, a partir de conocer la forma geométrica de la escotadura. En la figura 3 se muestran algunas formas clásicas.

El vertedero triangular es preferido cuando las descargas son pequeñas, porque la sección transversal de la lámina vertiente muestra de manera notoria la variación en altura.



La relación entre la descarga y la altura sobre la cresta del vertedero, puede obtenerse matemáticamente haciendo las siguientes suposiciones del comportamiento del flujo:

CONDICIONES IDEALES

1. Aguas arriba del vertedero el flujo es uniforme y la presión varía con la profundidad de acuerdo con la hidrostática ( $p=\rho gh$ ).
2. La superficie libre permanece horizontal sin remanso ni depresión (figura 2) hasta el plano del vertedero y todas las partículas que pasan sobre el vertedero se mueven horizontalmente (en realidad la superficie libre cae cuando se aproxima al vertedero).
3. Régimen laminar, las láminas o líneas de flujo siguen trayectorias ordenadas o laminares
4. La presión a través de la lámina de líquido que pasa sobre la cresta del vertedero es la atmosférica.
5. Los efectos de la viscosidad y de la tensión superficial son despreciables.
6. Régimen permanente o estacionario, es decir invariabilidad en el tiempo de los parámetros en estudio.
7. El rozamiento entre las paredes del vertedero y las líneas de flujo son despreciables.
8. No hay contracción de la vena líquida en la escotadura.

Estas suposiciones conducen al siguiente modelo de flujo ideal:

Aplicando Bernoulli entre (1) y (2) (figura 4) da:

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2$$

Si consideramos como (1), la posición superior del nivel de agua y (2), cresta o arista inferior del vertedero, y siendo (1) el nivel de referencia, queda:

$$p_1 = p_2 = p_{atm}, \quad h_1 = 0, \quad h_2 = -y, \quad v_1 = 0 \quad (1)$$

Reemplazando las relaciones (1) en la ecuación de Bernoulli queda:  $v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot y}$  (2)

Siendo:

- $B$ : Ancho de escurrimiento
- $H$ : Altura de carga sobre la arista del vertedero
- $\varphi$ : Ángulo de escotadura (simétrico respecto al eje)
- $dA$ : Diferencial de área
- $dQ$ : Diferencial de caudal
- $x, y$ : Variables en los ejes  $X, Y$

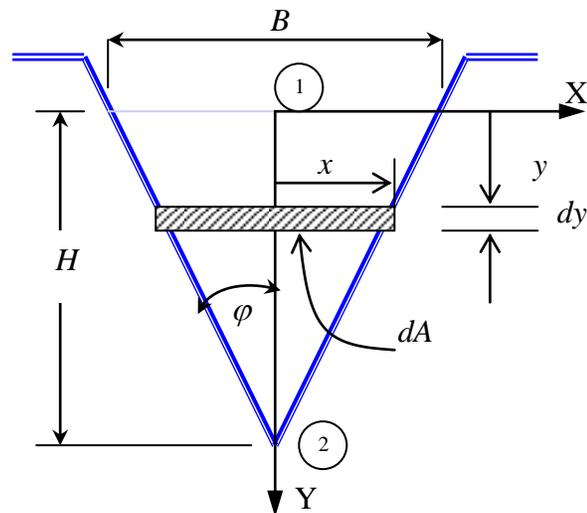


figura 4: vista frontal de una escotadura triangular

Además;  $dQ = v \cdot dA$  (3), de la figura 4 se obtiene:  $dA = 2 \cdot x \cdot dy$  (4), reemplazando (2) y (4) en (3) queda:  $dQ = 2 \cdot x \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot y} \cdot dy$  (5), la ecuación de la recta que representa el borde del vertedero en

sistema de coordenadas X, Y (figura 4); es:  $y = H - \frac{H}{B/2} \cdot x$  (6), al despejar x de (6) se tiene:

$$x = \frac{B}{2 \cdot H} (H - y) \quad (7), \text{ que al reemplazar en (5) nos da: } dQ = \frac{B(H - y)}{H} \sqrt{2 \cdot g} \cdot y^{1/2} \cdot dy,$$

$$\int_0^Q dQ = \frac{B \sqrt{2 \cdot g}}{H} \int_0^H (H - y) \cdot y^{1/2} \cdot dy \quad (8) \quad \rightarrow \quad Q = \frac{4 \cdot B \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{15 \cdot H} \cdot H^{5/2} \quad (9)$$

Pero B está en función de H, en cambio  $\varphi$  es constante, del gráfico se deduce que:  $\tan \varphi = \frac{B}{2 \cdot H}$  (10), reemplazamos (9) en (8), para tener el caudal en función de la altura y el ángulo de escotadura:

$$Q = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \tan \varphi \cdot H^{5/2} \quad (11)$$

La fórmula (11) muestra que el caudal de escurrimiento en condiciones ideales depende solamente de las características geométricas del vertedero y puede expresarse como:

$$Q = k \cdot H^m \quad (12), \text{ donde: } k = \frac{8}{15} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \tan \varphi \quad (13), \text{ una constante que depende de la geometría del}$$

vertedero triangular, mientras que:  $m = \frac{5}{2}$  (14) para todo vertedero triangular.

#### CONDICIONES REALES

La ecuación (11) ha sido deducida para condiciones ideales y no considera pérdidas, el valor calculado  $Q$  será mayor que el real  $Q_r$ .

Para corregir esta diferencia se define  $C_D$  como coeficiente de descarga, tal que:  $C_D = \frac{Q_r}{Q}$  (15),

Al ser:  $Q > Q_r$ , entonces  $C_D < 1$ . Mientras más se aproxima  $C_D$  a la unidad, más próximo es el comportamiento del vertedero real al ideal.

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Debe validarse la ecuación  $Q_r = C_D \cdot k \cdot H^m$ , si hacemos  $K = C_D \cdot k$ , tenemos  $Q_r = K \cdot H^m$ ,

Para linealizarla, aplicamos logaritmos:  $\log Q_r = \log K + m \cdot \log H$ ,

Haciendo:  $Q_r^* = \log Q_r$ ,  $K^* = \log K$ ,  $H^* = \log H$ , nos queda:  $Q_r^* = K^* + m \cdot H^*$  (16).

El valor de  $Q_r$  puede determinarse experimentalmente midiendo el volumen de agua que se vierte por unidad de tiempo, en función de diferentes alturas  $H$  de carga. Los resultados se ajustan a la ecuación de una recta según la ecuación (16).  $K^*$  (corte en la ordenada de la recta) se emplea para determinar el  $C_D$  del vertedero, mientras que  $m$  (pendiente de la recta) se emplean para la formulación de la hipótesis.

DE LINEALIDAD:  $r$  (coeficiente de correlación) debe ser próximo a 1.

ERROR DE LA ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO REFERENCIAL “ $m$ ” (de la regresión lineal)

Hipótesis nula  $H_0$  :  $m = \frac{5}{2}$

Hipótesis alternativa  $H_1$  :  $m \neq \frac{5}{2}$       Bilateral o de dos colas

## 1.4 OBJETIVOS

- Validar al vertedero triangular de pared delgada como medio para controlar caudal de escurrimiento.
- Encontrar el coeficiente de descarga de un vertedero triangular de pared delgada.

## 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

### 1.5.1 MATERIALES Y EQUIPO

Recipiente con escotadura triangular  
 Recipiente regulado o balanza  
 Cronómetro  
 Regla de 300 [mm]  
 Cintas (maskin)  
 Agua y recipientes

### 1.5.2 OBTENCIÓN DE MEDIDAS DE LOS PARÁMETROS Y CONSTANTES

1. Medir los valores de  $B$ ,  $H$  y  $e$ , (figura 5) el valor de  $\varphi$  se obtiene mediante:

$$\varphi = \arctan \frac{B/2}{H}$$

2. Si el triángulo es simétrico respecto a su eje central (isósceles),  $\varphi$  se repite a ambos lados de dicho eje.
3. Demarcar con cinta los valores de  $H_i$  alrededor del tanque, tal que

$$H_1 > \frac{e}{0,67} \text{ hasta un } H_n \text{ próximo a } H.$$

4. El vertedero debe llenarse con agua a los niveles demarcados.

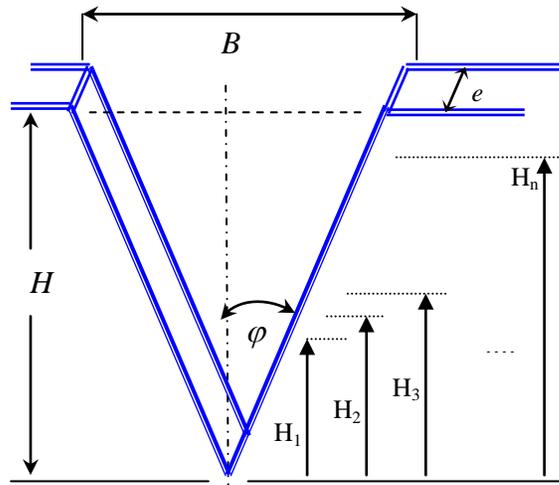


figura 5: medidas a registrar

### 1.5.3 OBTENCIÓN DE MEDIDAS DE LAS VARIABLES

1. Instalar el vertedero en posición horizontal y la compuerta instalada.
2. Selección de un recipiente para evacuar el agua vertida, éste puede ser una probeta graduada, si no se contara con tal, debe ser un recipiente de dimensiones que permita pesarse en la balanza cuando ésta está con agua.
3. Llenar con agua el vertedero hasta el nivel marcado con  $H_n$ .
4. Mientras un integrante del grupo retira la compuerta a tiempo de recibir en un balde el líquido evacuado, otro se encarga de echar agua a objeto de mantener  $H_n$  constante evitando que se formen turbulencias en el tanque.

5. Cuando se ha conseguido ésto, el integrante del grupo que está recibiendo el agua evacuada, introduce el recipiente seleccionado y se inicia el cronometraje de llenado del recipiente.
6. Cuando el recipiente está por llenarse, el mismo se retira y se finaliza el cronometraje de tiempo.
7. Medir o pesar según corresponda el recipiente con agua.
8. Repetir el procedimiento para las alturas  $H_n$  hasta  $H_1$ .

(opcional) Para conocer en que medida el integrante del grupo que echa agua al vertedero mantiene constante el nivel de agua, se puede cuantificar la cantidad de agua que vierte en el mismo intervalo de tiempo que se receptiona el agua descargada y así verificar si ambos volúmenes coinciden. Por ejemplo, si la cantidad de agua que se echa al tanque es mayor que la cantidad descargada por el vertedero, se está cometiendo error sistemático que incrementa el  $C_D$ .

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 CÁLCULOS

- Calcule los caudales:  $Q_i = V_i / t_i$  para cada  $H_i$ , si no se cuenta con probeta graduada, entonces:

$V_i = W_i / (g \cdot \rho)$ , donde  $W_i$  es el peso obtenido en la balanza y convertido a Newtons, podrían usarse:

$$g = 9,775 \text{ m/s}^2, \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

- Regresión lineal en la forma:  $y = a + b \cdot x$  ó  $Q_r^* = K^* + m \cdot H^*$ , con  $n$  medidas

$$Q_r^* = \frac{\sum H_i^{*2} \sum Q_i^* - \sum H_i^* \sum Q_i^* H_i^*}{n \sum H_i^{*2} - (\sum H_i^*)^2} + \frac{n \sum H_i^* Q_i^* - \sum H_i^* \sum Q_i^*}{n \sum H_i^{*2} - (\sum H_i^*)^2} \times H^* \quad (17)$$

$$r = \frac{n \sum Q_i^* H_i^* - \sum H_i^* \sum Q_i^*}{\sqrt{[n \sum H_i^{*2} - (\sum H_i^*)^2] \cdot [n \sum Q_i^{*2} - (\sum Q_i^*)^2]}} \quad (18), \text{ coeficiente de correlación}$$

- Trace en un solo gráfico  $Q^*$  vs  $H^*$ , los valores de caudal y alturas determinados experimentalmente, la recta ajustada a dichos valores y el  $Q^*$  vs  $H^*$  ideal ( $C_D = 1$ ).

- De la ecuación:  $K = C_D \times k$  (19), se tiene:  $C_D = \frac{K}{k}$ , donde:  $K = 10^{K^*}$ ,  $K^*$  es el primer término de la ecuación (17) con la regresión y  $k$  de la ecuación (13) con los datos geométricos del vertedero,

$$\text{finalmente obtiene: } C_D = \frac{15}{8} \cdot \frac{10^{K^*}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot \tan \varphi}} \quad \text{ó} \quad C_D = \frac{15}{8} \cdot \frac{\text{anti log } K^*}{\sqrt{2 \cdot g \cdot \tan \varphi}} \quad (20)$$

### 2.2 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

ERROR DE LA ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO REFERENCIAL “m”

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|m - 5/2|}{s_b}$ , donde:

$$s_b = \frac{s_{Q^*/H^*}}{\sqrt{\sum H_i^{*2} - \frac{1}{n}(\sum H_i^*)^2}} \quad (21), \quad s_{Q^*/H^*} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot H_i^*) - Q_i^*]^2}{n-2}} \quad (22),$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas: *t de tablas*:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse: *t calculado* < *t de tablas*.

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir el vertedero no ha sido validado porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas).

DE LINEALIDAD: El coeficiente de correlación  $r$  debe ser próximo a 1.

## 2.3 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

1. ¿Qué ventaja se obtiene en la medición de caudal en un vertedero triangular respecto a uno rectangular, si la altura de carga es mayor para el triangular si se trata del mismo caudal?
2. Indique que idealizaciones se asumieron en el experimento.
3. Si no se valida la ecuación de descarga, significa que se cometió error sistemático, ¿podría mencionar que factores pudieron provocar este error?.
4. ¿Qué sugerencias tiene para mantener en el experimento el nivel del tanque constante mientras el mismo se descarga?.
5. Deduzca el caudal de escurrimiento ideal para una escotadura de tipo trapezoidal. Sugerencia: Defina su sistema de coordenadas y determine la ecuación de la línea lateral, tal como se procedió en la deducción del caudal del vertedero de escotadura triangular).
6. Comente que modificaciones en el vertedero que no sean las geométricas, incrementarían el  $C_D$ .
7. Comente la diferencia entre la recta ajustada obtenida del experimento con la de comportamiento ideal ( $C_D=1$ ).
8. Compare el valor de  $C_D$  obtenido en laboratorio con otros referenciales.

Fórmula de Bazin:  $C_D = (0,405 + (0,003/H)) [1 + 0,55 \cdot H / (H + p) ]$

Fórmula de Société des Ingénieurs et Architectes Suisses (S.I.A.S.):

$C_D = 0,410 (1 + 1/(1.000H + 1,6)) [1 + 0,5 \cdot H / (H + p) ]$

Nota: "H" y "p" se muestran en la figura 1

9. Para condiciones ideales, calcule si el caudal de escurrimiento es mayor para un vertedero rectangular o triangular si ambos tienen la misma área. Sugerencia: Expresé los valores de caudal de descarga de ambos vertederos en función a su área, luego compárelos dividiendo uno sobre el otro para encontrar el mayor.
10. Si la balanza tiene una resolución de 1 [g], ¿cuál debería ser la escala mínima de medida de un recipiente graduado para que éste tenga la misma resolución en la medida de volumen de agua?

## VERTEDEROS

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

### Parámetros o constantes

medida directa

$B$  (ancho de la escotadura):

$H$  (altura del triángulo):

$e$  (espesor de la pared del vertedero):

$p$  ( altura de umbral según figura 1):

NOTA:  $p$  se empleará para responder pregunta 8 de la Discusión del Experimento

medida indirecta

$$\varphi = \arctan\left(\frac{B/2}{H}\right):$$

$H_1 > e/0,67$  (altura mínima):

asumidos

$g$ :

$\rho_L$  (densidad del agua)

### Variables

intervención directa

$n$ número de medición													
variable independiente altura $H_i$													
variable dependiente tiempo $t_i$													
variable dependiente volumen $V_i$ o $W_i$ *													

\* Si no se cuenta con vaso regulado, se pesa la cantidad de agua vertida y se aplica:  $V_i = \frac{W_i}{(\rho_L \cdot g)}$

otras variables intervinientes

NOTA: No olvide en anotar las unidades de las medidas obtenidas.

# DESCARGA POR ORIFICIOS

## 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

La velocidad de descarga de un líquido por el orificio de un recipiente expuesto a la atmósfera " $p_a$ " y cuya área " $a$ " de descarga es mucho menor que el área del recipiente " $A$ " (figura 1), viene expresada por:

$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot H_o}$ , esta ecuación se deduce a partir de consideraciones ideales, Sin embargo, en condiciones reales cuando el fluido tiene viscosidad y las paredes del recipiente presentan rozamiento, la velocidad real " $v_r$ " se hace menor. La corrección se realiza con el coeficiente de velocidad " $C_V$ " tal que:  $C_V = v_r/v < 1$ .

Del mismo modo la vena líquida se contrae en la salida del recipiente y el área efectiva " $a$ " se hace menor, reduciéndose a: " $a_r$ ". La corrección se consigue con el coeficiente de contracción " $C_C$ ", tal que  $C_C = a_r/a < 1$ . Consecuentemente, el caudal ideal que está dado por:  $Q = v \cdot A$ , también debe ser corregido por el coeficiente de descarga " $C_D$ ".

$$\text{De modo que: } C_D = \frac{Q_r}{Q} = \frac{v_r \times a_r}{v \times a} = \frac{v_r}{v} \times \frac{a_r}{a} = C_V \cdot C_C < 1 \quad (1)$$

### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

Consideremos el proceso de vaciado o descarga por gravedad de un depósito lleno inicialmente de un líquido de densidad  $\rho$ . El depósito, cuya área de la base es  $A$  está abierto a la atmósfera, donde la presión es la atmosférica, misma que se mantiene constante. La descarga se produce a través de una boquilla de área de salida  $a$ , que está situada a una profundidad  $H_o$  respecto de la posición inicial de la superficie libre, como se muestra en la figura 1.

**CONTRACCIÓN DEL FLUJO:** Vamos a considerar el caso con  $a \ll A$ , lo que nos permitirá utilizar un modelo casi-estacionario de flujo. Lo veremos más adelante. En primer lugar vamos a considerar la geometría de la boquilla de descarga, la cual condiciona la forma y sección del chorro de salida. Explicaremos en lo que sigue las cuatro boquillas axisimétricas dibujadas en la figura 2, para las que el chorro emergente se mantiene axisimétrico (antes de que la gravedad lo curve, a distancias próximas a la salida).

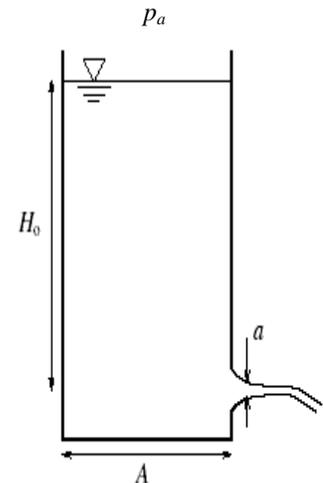


figura 1: descarga de un depósito

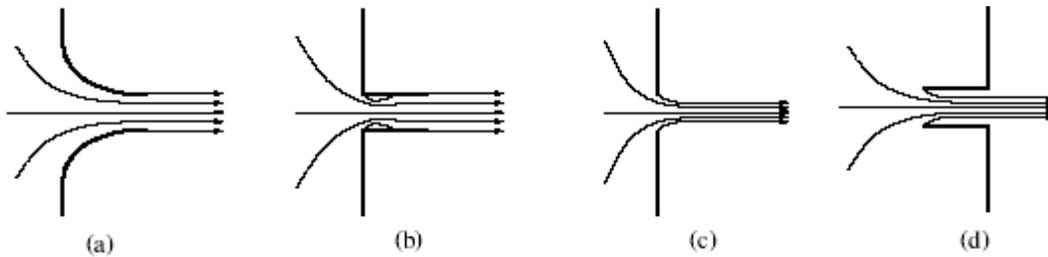


figura 2: tipo de boquillas axisimétricas

La boquilla (a) es un conducto lentamente convergente, que va guiando el flujo de manera que la velocidad a la salida tiene únicamente componente axial y el área del chorro es igual al área de la boquilla (a). La boquilla (b) es un conducto con aristas vivas. Debido a que el fluido no puede girar un ángulo recto en su movimiento (esto implicaría una presión infinita en la esquina) el flujo se separa de la pared del tubo, pero vuelve a adherirse.

Se forma en las paredes de la boquilla una zona anular de recirculación, pero el área del chorro emergente vuelve a ser igual al área de la boquilla y las líneas de corriente en la salida son paralelas. Como puede verse en la figura 2, en las boquillas (c) y (d) el chorro evoluciona desde el orificio de salida a lo largo de una cierta distancia hasta alcanzar propiedades uniformes aguas abajo, donde todas las líneas de corriente acaban siendo paralelas y la velocidad alcanza por tanto un valor uniforme. La sección del chorro cuando se alcanzan las propiedades uniformes es menor que el área de la boquilla. Por ello que el área efectiva o real “ $a_r$ ” de descarga se hace menor. Por lo tanto:

$$a_r = C_C \times a$$

**ORIFICIO DE PARED DELGADA:** Se define como orificio de pared delgada si el único contacto entre el líquido y la pared es alrededor de una arista afilada y  $e < 1.5d$ , como se observa en la figura 3. Cuando el espesor de la pared es menor que el diámetro ( $e < d$ ) no se requiere biselar.

En el orificio de pared gruesa, el contorno del orificio no tiene aristas afiladas y  $1.5d < e < 2d$ . Se presenta adherencia del chorro líquido a la pared del orificio.

Es orificio en pared gruesa eroga más caudal que en pared delgada, como se ve en la figura 2, comparando (b) y (c), por lo que cuando la función del mismo es erogar caudales importantes, ésta constituye la solución obligada.

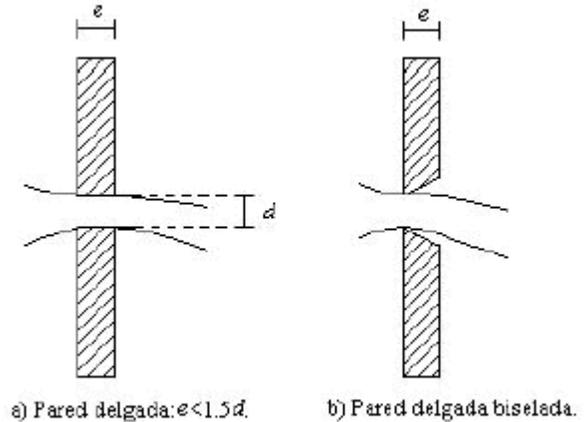


figura 3: orificio en la pared del tanque

**REDUCCIÓN DE LA VELOCIDAD:** Ya se dedujo en el experimento anterior, la velocidad de descarga de un fluido, conocida también como ecuación de Torricelli:  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$  (2) cuya validez es para condiciones ideales, se ha despreciado el efecto de la viscosidad. En consecuencia, las velocidades de todas las partículas de fluido situadas en una sección de un tubo son iguales y el fluido avanza en conjunto por el tubo (a) figura 4. El movimiento del fluido está caracterizado por un *perfil plano de velocidad*.

Cuando el fluido es viscoso y la velocidad no demasiado grande, el movimiento será laminar y el perfil de velocidad tiene la forma representada en (b) figura 4. Cuando la velocidad excede de un cierto valor crítico, la naturaleza del movimiento se hace mucho más complicada, el régimen es turbulento y su perfil de velocidad se asemeja a (c) figura 4.

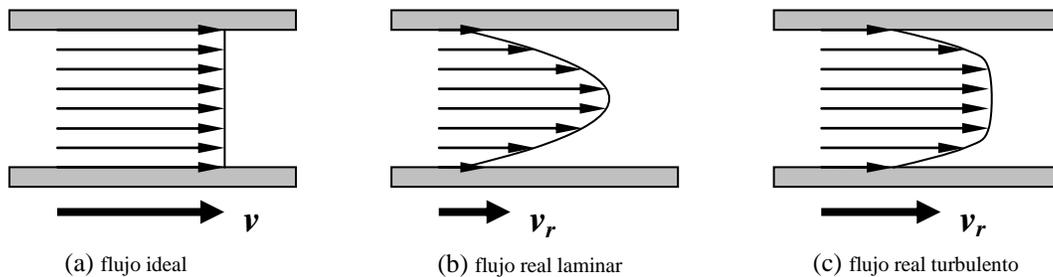


figura 4: perfil de velocidad para movimiento ideal, laminar y turbulento respectivamente

La velocidad promedio “ $v$ ” en la sección de una tubería con flujo ideal (a) figura 4, es mayor que las velocidades medias “ $v_r$ ” de flujos reales laminar y turbulento respectivamente (b) y (c) de la figura 4. Consecuentemente se tiene:  $v_r = C_V \times v$  (3), al ser  $v_r < v$ , entonces  $C_V < 1$

**NÚMERO DE REYNOLDS:** El número de Reynolds es un valor adimensional (sin unidades) que evalúa si un flujo en una tubería es laminar o turbulento, se calcula con la ecuación:  $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta}$ , siendo  $D$  el diámetro del tubo en

[m],  $\rho$  la densidad del fluido en [Kg/m<sup>3</sup>],  $v$  la velocidad promedio del flujo en [m/s] y  $\eta$  la viscosidad en [Kg/m-s]. Reynolds encontró que el flujo en una tubería permanecía laminar hasta números "Re" (número de Reynolds) igual a 2000.

**Determinación del coeficiente de descarga  $C_D$**

Para vaciado del tanque:  $Q = -\frac{dV}{dt}$  (4), además:

$$Q = v \cdot a = \sqrt{2 \cdot g \cdot y} \cdot a \quad (5) \quad dV = A \cdot dy \quad (6),$$

reemplazando (5) y (6) en (4) da:

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot y} \cdot a \cdot dt = -A \cdot dy. \text{ Al ser: } g, a, A \text{ constantes,}$$

$$\text{resolvemos: } t = \int_0^t dt = -\frac{A}{a\sqrt{2 \cdot g}} \int_H^h \frac{dy}{\sqrt{y}} =$$

$$\frac{2A(H^{1/2} - h^{1/2})}{a\sqrt{2 \cdot g}} \quad (7) \text{ Pero; } C_D = \frac{Q_r}{Q} = \frac{V/t_r}{V/t} \text{ luego}$$

$$C_D = t/t_r \quad (8), (7) \text{ en } (8) \text{ da:}$$

$$C_D = \frac{2A(H^{1/2} - h^{1/2})}{t_r \cdot a \cdot \sqrt{2g}} \quad (9),$$

donde "t<sub>r</sub>" es el tiempo real de vaciado de  $H$  a  $h$

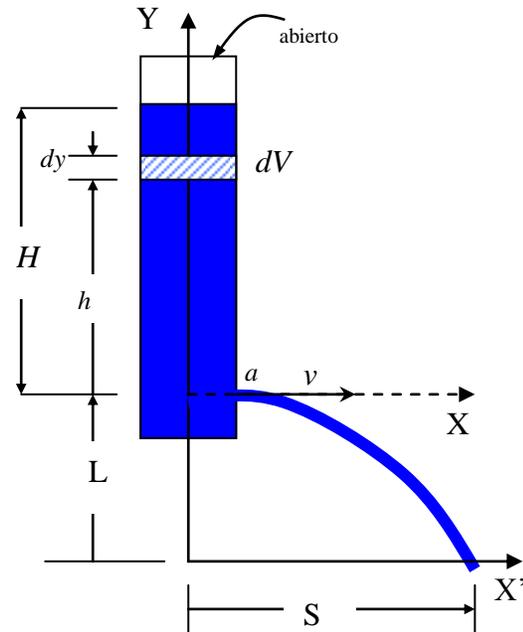


figura 5: parámetros de medida en la descarga del depósito

**Determinación del coeficiente de velocidad  $C_v$**

Si se desprecia la resistencia del aire, se puede calcular la velocidad real del chorro en función de las coordenadas rectangulares de su trayectoria  $S, L$ , figura 5. Al despreciar la resistencia del aire, la velocidad horizontal del chorro en cualquier punto de su trayectoria permanece constante y al llegar al piso será:

$$v_x = \frac{S}{t} \quad (10)$$

$V$  : velocidad horizontal.

$X$  : distancia horizontal del punto a partir de la sección de máxima contracción.

$t$  : tiempo que tarda la partícula en desplazarse.

La distancia vertical  $L$  recorrida por la partícula bajo la acción de la gravedad en el mismo tiempo  $t$  y sin

$$\text{velocidad inicial está dada por las ecuaciones de la cinemática: } L = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot L}{g}} \quad (11),$$

$$\text{reemplazando (11) en (10) tenemos: } v_x = \frac{S}{\sqrt{\frac{2 \cdot L}{g}}} \quad (12), \text{ pero: } v_x = v_r \quad (13), \text{ pues esta velocidad será}$$

determinada experimentalmente. Al reemplazar (13) en (12) y luego en (3) da:

$$C_V = \frac{v_r}{v} = \frac{S/\sqrt{\frac{2 \cdot L}{g}}}{v} \quad (14), \quad \text{pero } v = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (15) \text{ de condiciones ideales.}$$

Finalmente se reemplaza (15) en (14) y se tiene:  $C_V = \frac{S}{\sqrt{4 \cdot H \cdot L}}$  o  $C_V = \frac{S}{2\sqrt{H \cdot L}}$  (16)

#### Determinación del coeficiente de contracción $C_C$

Al ser la medición de la vena contraída dificultosa con instrumentos de medida convencionales, su valor se obtendrá de modo indirecto a partir de la ecuación (1) como sigue:  $C_C = C_D/C_V$  (17), nótese que:

$$C_D \leq C_C \quad \text{y} \quad C_D \leq C_V$$

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Debido a que los valores de  $C_D$ ,  $C_V$  y  $C_C$  no se conocen, pues dependen de las condiciones particulares en cuanto a geometría y material del recipiente y el orificio, se validará el comportamiento bajo la suposición que los coeficientes son independientes para diferentes alturas de carga.

El comportamiento de la descarga es:  $t_r = \frac{2 \cdot A}{C_D \cdot a \sqrt{2g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h})$  (18)

Suponiendo como constante a:  $k = \frac{2A}{C_D \cdot a \sqrt{2g}}$  (19),  $z = (\sqrt{H} - \sqrt{h})$  (20), o sea:  $t_r = k \times z$  (21)

El valor de  $t_r$  puede determinarse experimentalmente controlando el tiempo que toma descargar diferentes relaciones de alturas  $H^{1/2} - h^{1/2}$  de agua. Se obtendrá la ecuación de la recta:  $t_r = xo + kz$ , donde el corte en la ordenada  $xo$  debe ser cero para comprobar la hipótesis, la pendiente de la recta "k" permite encontrar el  $C_D$ .

#### ERROR DE LA ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO REFERENCIAL "xo" (de la regresión lineal)

Hipótesis nula  $H_0$  :  $xo = 0$

Hipótesis alternativa  $H_1$  :  $xo \neq 0$  Bilateral o de dos colas

DE LINEALIDAD: El coeficiente de correlación  $r$  debe ser próximo a 1.

### 1.4 OBJETIVOS

- Validar la ecuación de descarga por orificios.
- Encontrar los coeficientes de descarga, de velocidad y contracción de los equipos usados en laboratorio.

### 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

#### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Recipiente con agua (tubo) con orificio circular sostenido verticalmente por un pedestal (el tubo debe contar con una manguerita transparente que permita visualizar el nivel del líquido).
- Regla graduada y cinta para marcar.
- Cronómetro.
- Tiza para marcar.

- Plomada.

### 1.5.2 OBTENCIÓN DE MEDIDAS DE LOS PARÁMETROS Y CONSTANTES

1. Medir los valores de Diámetro del tubo  $D(\text{interior})$ ,  $d$  y  $e$ , los primeros datos se emplean para hallar:  $A$  y  $a$ , con  $A = \pi \cdot D^2 / 4$ ,  $a = \pi \cdot d^2 / 4$
2. Demarcar con cinta los valores de  $H_i - h_i$  como se muestra en la figura 6, al mantener  $H_i$  constante en  $H$ , se tendría:  $z_i = (\sqrt{H} - \sqrt{h_i})$ , recuérdese que  $h_i$  se mide desde el centro del orificio hasta el nivel de la superficie del agua.
3. Medir  $L$ , la distancia vertical medida desde el piso al centro del orificio.
4. Marcar el origen "o" (figura 7) del sistema de coordenadas con ayuda de una plomada

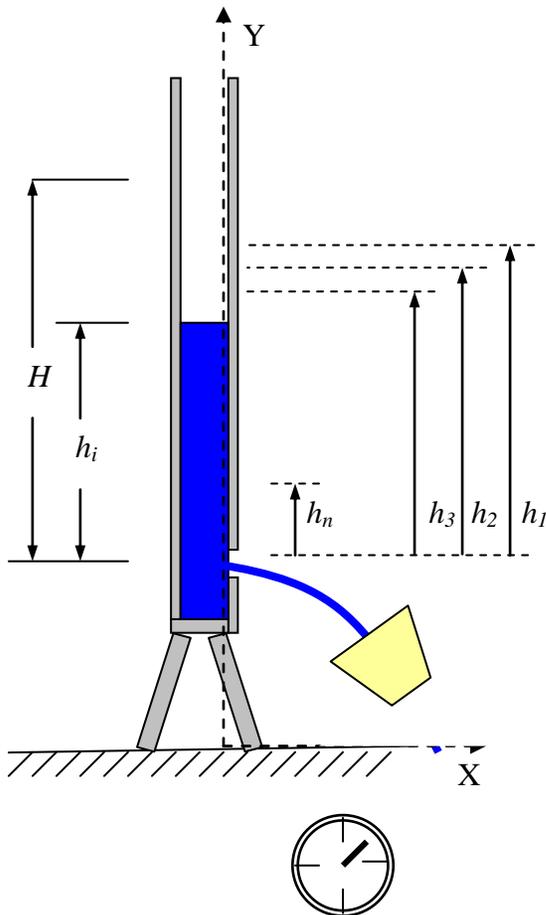


figura 6: determinación del coeficiente de descarga  $C_D$

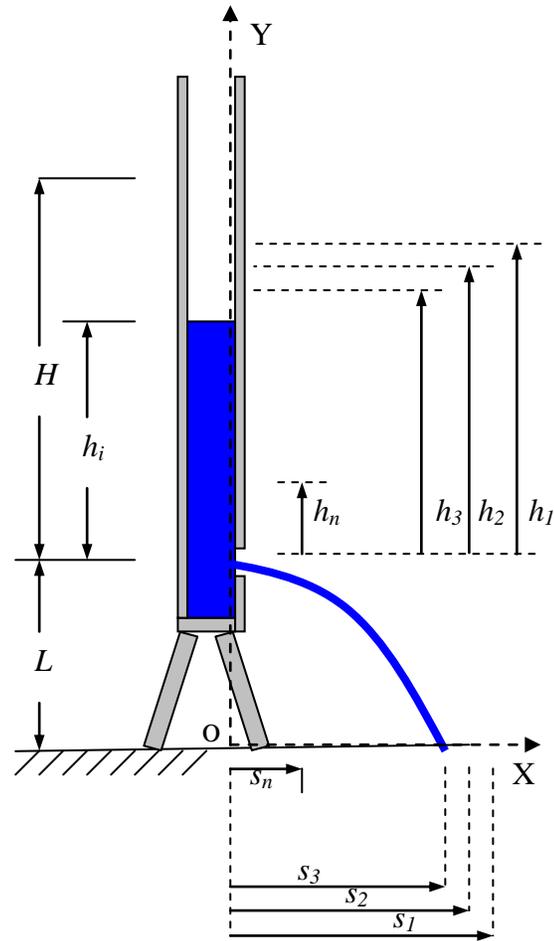


figura 7: determinación del coeficiente de velocidad  $C_V$

### 1.5.2 OBTENCIÓN DE MEDIDAS PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE DESCARGA

1. Instalar el tubo vertical, de modo que el chorro salga horizontalmente del orificio, ayúdese con una plomada.
2. Selección de un recipiente para evacuar el agua vertida.
3. Marcar con una cinta al menos seis niveles  $h_i$ , escoja un valor mayor a 0,1 m para  $h_n$ .
4. Controle con un cronómetro el tiempo de descarga para las diferentes relaciones  $H$  a  $h_i$ .
5. Repetir el procedimiento para las diferentes alturas  $h_i$ .
6. Para no tener que llenar nuevamente el tubo con agua, debe taparse el orificio para evitar que el líquido se derrame insulsamente mientras se recaban lecturas del volumen evacuado.

1.5.4 OBTENCIÓN DE MEDIDAS PARA DETERMINAR EL COEFICIENTE DE VELOCIDAD

1. Llenar nuevamente el recipiente (tubo) hasta la altura  $H$  manteniendo el orificio cerrado.
2. Destapar el orificio y a medida que el nivel del agua va bajando, se deben medir los pares  $(s_i, h_i)$  como se muestra en la figura 7, ello permitirá calcular la velocidad real de salida en función de las alturas  $h_i$ .
3. Se puede emplear una tiza para marcar en el piso el desplazamiento  $s_i$ .
4. Deben obtenerse al menos seis parejas de datos  $h_i$  y su correspondiente  $s_i$ .

2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

2.1 CÁLCULOS

2.1.1 COEFICIENTE DE DESCARGA

- Calcule las relaciones  $z_i = \sqrt{H} - \sqrt{h_i}$  para llevar a la forma lineal.
- Regresión lineal en la forma:  $y = a + b \cdot x$  ó  $t_r = x_0 + k \cdot z$ , con  $n$  medidas

$$t_r = \frac{\sum z_i^2 \sum t_i - \sum z_i \sum t_i z_i}{n \sum z_i^2 - (\sum z_i)^2} + \frac{n \sum z_i t_i - \sum z_i \sum t_i}{n \sum z_i^2 - (\sum z_i)^2} \times z$$

$$r = \frac{n \sum t_i z_i - \sum z_i \sum t_i}{\sqrt{[n \sum z_i^2 - (\sum z_i)^2] \cdot [n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2]}}$$
, coeficiente de correlación

- Trace en un solo gráfico  $t_r$  vs  $z$ , con los valores de tiempo y alturas determinados experimentalmente, la recta ajustada a dichos valores y el  $t$  vs  $z$  ideal ( $C_D = 1$ ).
- De la ecuación:  $C_D = \frac{2A}{k \cdot a \sqrt{2g}}$ , donde  $k$  es la pendiente de la recta ajustada, hallar  $C_D$ .
- Calcule el número de Reynolds máximo y mínimo desarrollados en esta parte del experimento.

2.1.2 COEFICIENTE DE VELOCIDAD

- Llevando la ecuación (16) a la forma lineal:  $y = a + b \cdot x$  ó  $H^* = a + b \cdot S$

Donde:  $H^* = \sqrt{H_i}$ ,  $a = 0$ ,  $b = \frac{1}{2\sqrt{L} \cdot C_v}$ ,  $S = s_i$

$$H^* = \frac{\sum s_i^2 \sum H_i^* - \sum s_i \sum H_i^* s_i}{n \sum s_i^2 - (\sum s_i)^2} + \frac{n \sum s_i H_i^* - \sum s_i \sum H_i^*}{n \sum s_i^2 - (\sum s_i)^2} \times s$$

$$r = \frac{n \sum H_i^* s_i - \sum s_i \sum H_i^*}{\sqrt{[n \sum s_i^2 - (\sum s_i)^2] \cdot [n \sum H_i^{*2} - (\sum H_i^*)^2]}}$$
 coeficiente de correlación

- Trace en un solo gráfico  $H^*$  vs  $s$ , con los valores de altura y desplazamiento determinados experimentalmente, la recta ajustada a dichos valores y el  $H^*$  vs  $s$  ideal ( $C_V=1$ ).
- De la ecuación:  $b = \frac{1}{2 \cdot C_V \cdot \sqrt{L}}$ , donde  $b$  es la pendiente de la recta ajustada, hallar  $C_V$ .
- Calcule el número de Reynolds máximo y mínimo desarrollados en esta parte del experimento.

### 2.1.3 COEFICIENTE DE CONTRACCIÓN

Empleando la ecuación (17) se encuentra el coeficiente de contracción;  $C_C = \frac{C_D}{C_V}$

Si no se cometieron errores graves o sistemáticos en el experimento, el  $C_D$  será menor a  $C_V$ , de manera que el  $C_C$  es menor que la unidad.

### VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

#### ERROR DE LA ESTIMACIÓN

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|a-0|}{s_a}$ ,

$$\text{donde: } s_a = s_{t_r/z} \times \sqrt{\frac{\sum z_i^2}{n \sum z_i^2 - (\sum z_i)^2}}; \quad s_{t_r/z} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot z_i) - t_{ri}]^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas:  $t$  de tablas:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t$  calculado  $<$   $t$  de tablas.  $t_{\alpha/2, n-2}$

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir no se valida la ecuación de descarga por orificios porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas).

DE LINEALIDAD:  $r$  debe ser próximo a 1.

### DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

- 1 ¿El orificio empleado en laboratorio es de pared delgada o gruesa?
- 2 Si se practicara un orificio de forma triangular, ¿se modificaría el coeficiente de contracción?, explique.
- 3 Explique ¿qué errores se podrían cometer al no emplear plomada en el experimento?
- 4 ¿Se puede asumir que la velocidad de salida del chorro de líquido es directamente proporcional al nivel del líquido?, justifique su respuesta.
- 5 ¿Qué modificaciones realizaría en el equipo de laboratorio para maximizar el coeficiente de contracción?, ¿qué modificaciones para maximizar el coeficiente de velocidad?
- 6 La figura 7 representa los resultados en función del número de Reynolds, compare el rango obtenido en laboratorio con los que muestra esta figura y comente.
- 7 Explique por qué se recomienda que la altura mínima de descarga  $h_n$  sea mayor a 0,1 m. Sugerencia, haga uso de la figura 8.
- 8 Refiriéndonos a la figura 7, ¿Por qué cree que el coeficiente de velocidad se acerca a uno cuando el número de Reynolds se incrementa?
- 9 Si el tiempo de vaciado medido experimentalmente para un recipiente era de 110 [s], y el tiempo de vaciado calculado con las ecuaciones de flujos ideales era de 100 [s]. ¿Cuánto es el  $C_D$ ?
- 10 Compare el resultado obtenido en laboratorio con las condiciones que muestra la figura 8 y comente.

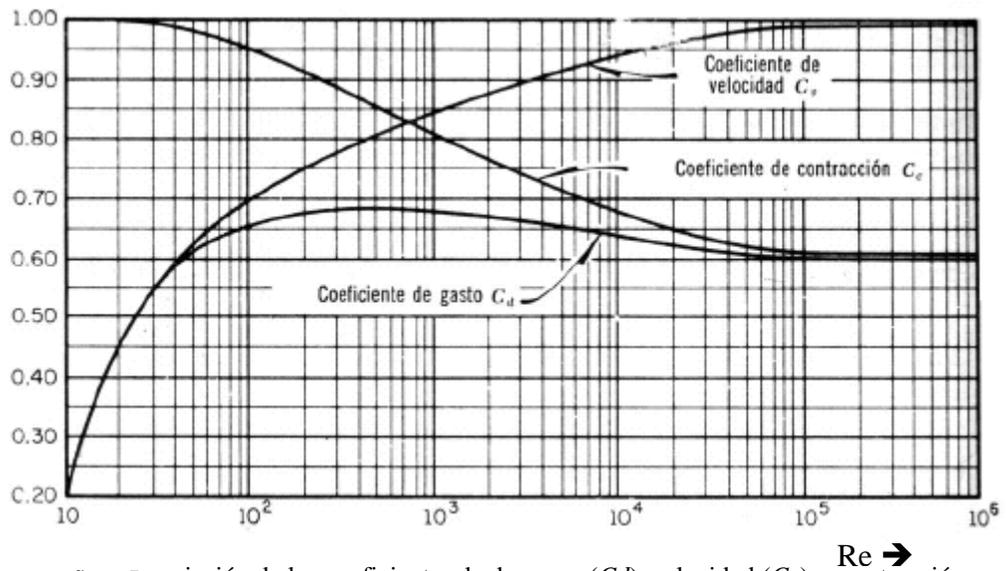


figura 7: variación de los coeficientes de descarga ( $C_d$ ), velocidad ( $C_v$ ), y contracción ( $C_c$ ), con el número de Reynolds en un orificio circular. (Sotelo, G. 1982)

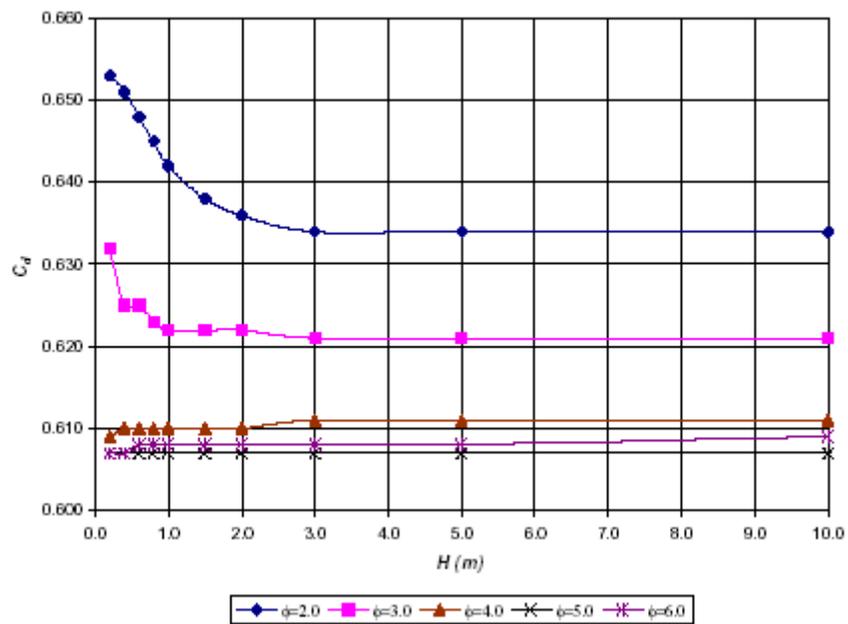


figura 8: Experimento para encontrar la variación del  $C_d$  en función de la altura de descarga y distintos diámetro de orificio

NOTA: La Viscosidad del agua es 0,00105 Kg/m s

## DESCARGA POR ORIFICIOS

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

### Parámetros o constantes

medida directa

$d$ (diámetro del orificio):

$D$ (diámetro interior del tubo o recipiente):

$e$  (ancho de la pared del tubo):

$H$  (altura máxima de carga):

$L$ (altura vertical del orificio sobre el piso):

$n$  (número de medidas):

medida indirecta

$$a = \pi \cdot d^2 / 4 :$$

$$A = \pi \cdot D^2 / 4 :$$

asumidos

$g$ :

$\rho_L$ (densidad del agua)

### Variables

intervención directa

#### COEFICIENTE DE DESCARGA

n número de medición													
variable independiente altura $h_i$ [m]													
variable dependiente tiempo $t_i$ [s]													

#### COEFICIENTE DE VELOCIDAD

n número de medición													
variable independiente altura $h_i$ [m]													
variable dependiente desplazamiento $s_i$ [m]													

Otras variables intervinientes:

# VISCOSIMETRÍA

## 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Ya se ha visto que el rozamiento entre dos sólidos en movimiento depende solamente de la rugosidad del material que están compuestos. Sin embargo, en un fluido, el rozamiento que produce sobre un sólido está en función de la velocidad y forma geométrica del cuerpo que se propaga en él.

Existen dos modelos para describir el rozamiento que producen los fluidos, éstos indican dos tipos de comportamiento para las fuerzas:

- Una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad, para valores del número de Reynolds bajos.
- Una fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad para altos números de Reynolds.

La condición de bajos números de Reynolds implica un flujo laminar lo cual puede traducirse por una velocidad relativa entre la esfera y el medio, inferior a un cierto valor crítico. En estas condiciones la resistencia que ofrece el medio es debida casi exclusivamente a las fuerzas de rozamiento que se oponen al deslizamiento de unas capas de fluido sobre otras a partir de la capa límite adherida al cuerpo.

### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

**ANÁLISIS DE FUERZAS EN UN FLUIDO IDEAL:** Al introducirse un cuerpo con densidad mayor a la del fluido ideal, éste se sumerge y la relación de fuerzas será como se muestra en la figura 1.

El valor del empuje está dado por:  $E = \rho_L \times g \times V_e$  (1)

Donde:

- $E$ : Fuerza de empuje en [N].
- $\rho_L$ : Densidad del fluido en  $[\text{kg}/\text{m}^3]$ , para el experimento aceite mineral.
- $g$ : Constante de gravedad en  $[\text{m}/\text{s}^2]$  en el lugar del experimento.
- $V_d$ : Volumen en  $[\text{m}^3]$  del perdigón a emplearse en el experimento.

La fuerza debida a su masa es:  $W = m \cdot g = \rho_e \times g \times V_e$  (2)

Donde:

- $W$ : Peso del cuerpo en [N]
- $m$ : Masa del cuerpo [kg]

Por ser:  $\rho_e$  mayor que  $\rho_L$ , consecuentemente el peso  $W$  también será mayor que el empuje  $E$ , de modo que las fuerzas no se equilibran en un fluido ideal, y la esfera acelera en su camino según:  $W - E = m \cdot a$

**ANÁLISIS DE FUERZAS EN UN FLUIDO REAL:** En el estudio de los fluidos reales, se considera la viscosidad de los mismos, la cual ejerce una fuerza de rozamiento sobre un cuerpo que se desplaza con determinada velocidad.

La ley de Stokes se refiere a la fuerza de fricción experimentada por objetos esféricos moviéndose en el seno de un fluido viscoso con régimen laminar (números de Reynolds bajo). Fue derivada en 1851 por George Gabriel Stokes tras resolver un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes. En general la ley de Stokes es válida en el movimiento de partículas esféricas pequeñas moviéndose a velocidades bajas.

La esfera que cae en un medio viscoso, se mueve bajo la acción de las siguientes fuerzas: el peso, el empuje (se supone que el cuerpo está completamente sumergido en el seno de un fluido), y una fuerza de rozamiento que es proporcional a la velocidad de la esfera (suponemos que el flujo se mantiene en régimen laminar).

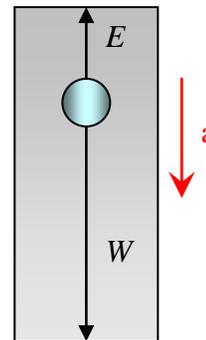


figura 1: condición ideal

La fuerza de rozamiento planteada por Stokes para fluidos con  $Re < 1$  es:

$$F_r = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (3), \text{ para condiciones con } Re \text{ mayores, la validez de la ecuación 3, decae gradualmente.}$$

Donde:

- $F_r$ : Fuerza de rozamiento en [N]
- $\eta$ : Viscosidad del fluido, (viscosidad dinámica) [kg/m s] [DP]
- $r$ : Radio de la esfera en [m]
- $v$ : Velocidad de caída de la esfera en [m/s]
- $Re$ : Número de Reynolds

El número de Reynolds es un valor adimensional (sin unidades) que evalúa si un flujo en una tubería es laminar o turbulento, se calcula con la ecuación:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta} \quad (4), \text{ siendo } D \text{ diámetro del tubo en [m] y } \rho \text{ la densidad del fluido.}$$

NOTA: La unidad de la viscosidad en el sistema CGS es el Poise [gr/cm s], en el sistema SI es el DPoise, [kg/m s] o [N s/m<sup>2</sup>] es decir: 1 [DP] = 10 [P]

La ecuación del movimiento será, por tanto;  $mg - E - F_r = m \cdot a \quad (5)$

Debido a la aceleración del cuerpo, el cuerpo ganará velocidad, consecuentemente la fuerza de rozamiento  $F_r$  se incrementará hasta que el sistema entre en equilibrio y la sumatoria de fuerzas sea cero, en esa condición se cumple:  $mg - E = F_r \quad (6).$

Antes que el sistema entre en equilibrio, el cuerpo está con aceleración, la ecuación que rige ese movimiento es:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - E - 6\pi\eta r v \quad \text{es decir:} \quad m \frac{dv}{dt} = F - k \cdot v \quad (7),$$

Donde  $F$  es la diferencia entre el peso y el empuje  $F = mg - E$ , y  $k = 6\pi\eta r$ . Integramos la ecuación del movimiento para obtener la velocidad de la esfera en función del tiempo.

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{F}{m} - \frac{k}{m}v} = \int_0^t dt \quad (8) \text{ resolviendo se obtiene:} \quad v = \frac{F}{k} \left( 1 - \exp\left(\frac{-kt}{m}\right) \right) = \frac{F}{k} \left( 1 - e^{\left(\frac{-kt}{m}\right)} \right) \quad (9)$$

Por ejemplo, para:

- $r = 0.0015 [m],$
- $\eta = 0.23 \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right] \text{ ó } [DPoises],$
- $m = 0.00013 [kg],$
- $\rho_e = 8000 \left[ \frac{kg}{m^3} \right],$
- $\rho_L = 890 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$

Reemplazando en la ecuación (9), se obtiene la variación de  $v$  como muestra la figura 3.

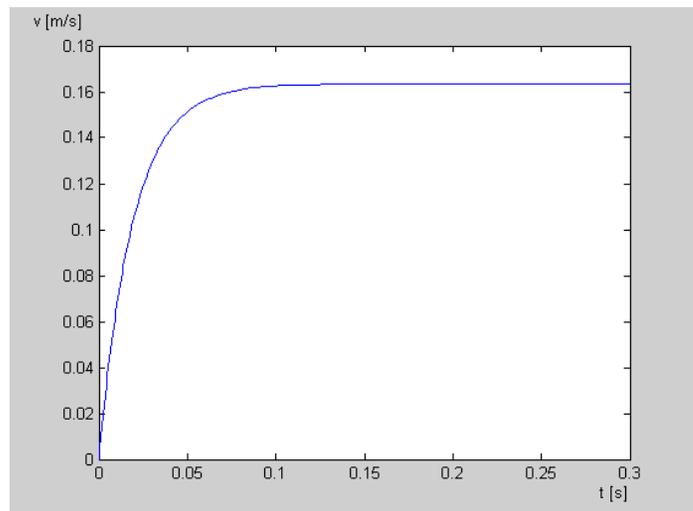


figura 3: velocidad del perdigón en función al tiempo

La figura 3 muestra que la velocidad de régimen es de aproximadamente 0,16 m/s y que este valor es alcanzado en menos de 0,15 s. Es decir que el perdigón llega al régimen de velocidad constante casi inmediatamente de introducirse en el recipiente de aceite.

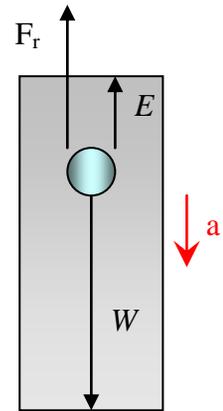


figura 2: condición real

En el experimento se empleará como recipiente un tubo de vidrio de longitud mayor que su diámetro, por lo tanto las paredes laterales de dicho tubo restringen el movimiento de las láminas del fluido, reduciéndose de esta manera la velocidad de la esfera. Ladenburg propone emplear el factor:  $[1+2,4(r/R)]$  para corregir la velocidad debido a la influencia de las paredes laterales, entonces el enunciado de Stokes o ecuación (3) queda:

$$F = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot v \cdot \left(1 + 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot \eta \quad (10)$$

donde:  $r$  es el radio del perdigón y  $R$  el radio del recipiente.

El factor de corrección de Ladenburg se hace significativo para recipientes en los que  $r \approx R$

Cuando el sistema de fuerzas entra en equilibrio con la velocidad en régimen, se reemplazan las ecuaciones (1), (2) y (10) en la (6) para obtener finalmente la ecuación (11), que permite encontrar la viscosidad del aceite.

$$\eta = \frac{2 r^2 \cdot g(\rho_e - \rho_L)}{9 v \left(1 + 2,4 \cdot \frac{r}{R}\right)} \quad (11)$$

### 1.3 FORMULACIÓN DE HIPÓTESIS

Debe comprobarse que la ecuación (11) tiene comportamiento lineal, es decir:  $v = \frac{h}{t}$  debe ser constante para que la viscosidad quede definida, si sus condiciones iniciales son cero, luego debe cumplirse:  $y = 0 + (v) t$  que se obtiene experimentalmente de registrar pares de  $y$  y  $t$ . De ahí se realiza regresión lineal a la forma:  $y = a + (b) t$ , consecuentemente se realizarán dos pruebas:

ERROR DE LA ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO REFERENCIAL “ $a$ ” (de la regresión lineal)

Hipótesis nula  $H_0$  :  $0 = a$

Hipótesis alternativa  $H_1$  :  $0 \neq a$  Bilateral o de dos colas

DE LINEALIDAD: Debe constatarse que el coeficiente de correlación  $r$  sea próximo a 1

### 1.4 OBJETIVOS

- Validar la Ley de Stokes para caída de una esfera en un fluido viscoso.
- Encontrar la viscosidad de un fluido viscoso.

### 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

#### 1.5.1 MATERIALES Y EQUIPO

- Recipiente de aceite (tubo de foco fluorescente).
- Perdigos de acero u otro metal.
- Cronómetro.
- Regla métrica y cinta para marcar desplazamientos.
- Balanza para pesar los perdigos.

- Vernier o tornillo micrométrico para medir los perdigones y diámetro del recipiente.
- Termómetro.
- Envase para pesar la muestra de aceite.

### 1.5.2 OBTENCIÓN DE MEDIDAS DE LOS PARÁMETROS Y CONSTANTES

1. Medir el diámetro del perdigón esférico.
2. Para obtener el peso de cada esfera si se empleará una balanza digital bastará con una sola media, sin embargo, se recomienda pesar al menos 10 de ellas de una sola vez, así el peso unitario se consigue de la división del peso total entre la cantidad de perdigones pesados, así se incrementa la resolución de la medida.
3. Obtener una muestra representativa del aceite confinado en el recipiente para también pesarlo.
4. Medir el volumen de la muestra de aceite mediante el empleo de un recipiente graduado, pesar la muestra de aceite para encontrar la densidad del aceite  $\rho$ .
5. Conseguir una muestra del recipiente de aceite para medir el diámetro interior del mismo.

### 1.5.3 OBTENCIÓN DE MEDIDAS DE LAS VARIABLES

1. Encender el foco que permite visualizar al perdigón en caída en el interior del recipiente o tubo (figura 4).
2. Medir la temperatura del aceite.
3. Dejar caer un perdigón para visualizar su caída.
4. Se marca con cinta los niveles referenciales como inicio y final del recorrido del perdigón. (dejar aproximadamente unos 0,05 m desde la superficie al nivel superior y desde el nivel inferior y la base del recipiente)
5. Colocar marcas intermedias con la cinta, por ejemplo, como se muestra en la figura 4, se deben registrar al menos seis trayectorias.
6. Dejar caer las esferas en el tubo de aceite y cronometrar el tiempo que recorre cada una de ellas en los trayectos predeterminados. Se obtendrán pares (y,t), las esferas a emplearse deben estar secas y limpias.
7. Una vez concluidas las lecturas medir nuevamente la temperatura del aceite.

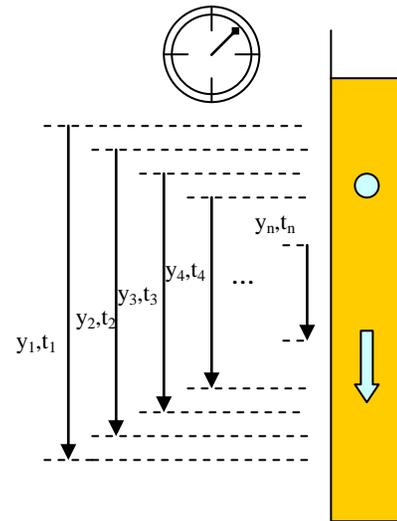


figura 4: caída de perdigón en tubo de aceite

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 CÁLCULOS

- Luego de obtener los pares de datos:  $(y_i, t_i)$ , se aplica regresión lineal:  $y = a + b \cdot t$

$$y = \frac{\sum t_i^2 \sum y_i - \sum t_i \sum t_i y_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2} + \frac{n \sum t_i y_i - \sum t_i \sum y_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2} \times t, \text{ donde } n, \text{ es el número de medidas}$$

$$r = \frac{n \sum t_i y_i - \sum t_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}, \text{ coeficiente de correlación}$$

- El valor de “a” de la recta ajustada debe ser cero y se emplea para formular la hipótesis en base al error de estimación, mientras que “b” representa la velocidad “v” de caída de la esfera y “r” el coeficiente de correlación.

- Graficar los pares de puntos  $(y_i, t_i)$  más la línea ajustada obtenida con la regresión.
- Reemplazar la velocidad en la ecuación (11) para determinar la viscosidad.
- Calcular el número de Reynolds.

## 2.2 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

ERROR DE LA ESTIMACIÓN DEL PARÁMETRO REFERENCIAL “a”

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|a-0|}{s_a}$ ,

$$\text{donde: } s_a = s_{y/t} \times \sqrt{\frac{\sum t_i^2}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}} ; \quad s_{y/t} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot t_i) - y_i]^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas: *t de tablas*:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse: *t calculado* < *t de tablas*.

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la Ley de Stokes no ha sido validada porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas).

DE LINEALIDAD: *r* debe ser próximo a 1.

## 2.3 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

1. ¿En que tiempo llegaría la esfera del experimento a la velocidad de régimen en agua?, considere los niveles de viscosidad indicados en la siguiente tabla

Fluido	Densidad (Kg/m <sup>3</sup> )	Viscosidad (kg/m·s) [DP]
Agua	1000	0,00105
Glicerina	1260	1,3923
Benceno	880	0,000673
Aceite	880	0,391

2. ¿Se obtendría el mismo resultado en el experimento, si en cambio fuera el aceite el que se desplaza alrededor de una esfera fija?. Entonces, la ecuación de Stokes corresponde a la estática o dinámica de fluidos?
3. Transformar la viscosidad obtenida en [DP] a [cP] y averiguar a que escala SAE corresponde.
4. Explique el tipo de régimen para la caída de la esfera en el experimento. ¿Qué parámetros cambiaría para que el número de Reynolds sea menor?, sugerencia: Despeje la velocidad de la ecuación 11 y reemplácela en la ecuación del Número de Reynolds.
5. ¿En qué medida se modificó la temperatura del aceite desde el inicio a final del experimento?, ¿habrá variado la viscosidad del aceite en ese proceso?
6. Indique las diferencias en la velocidad y aceleración entre: caída libre de un cuerpo en un fluido ideal con caída de un cuerpo en el seno de un fluido viscoso.
7. Indique la incidencia en el resultado debido a la inclusión del coeficiente de corrección de Ladenburg.
8. Si conociéramos el valor verdadero de la viscosidad del aceite, ¿qué prueba de hipótesis se podría hacer?
9. ¿Qué modificaciones se presentarían en el experimento, si en vez de aceite se empleara glicerina? (ver la tabla de la pregunta uno).
10. Si el tiempo es la variable dependiente, ¿por qué se sugiere graficar al tiempo en las abscisas?

# VISCOSIMETRÍA

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

## Parámetros o constantes

medida directa

$d$ (diámetro esfera):  
 $D$ (diámetro interior recipiente o tubo):  
 $W_e$ (peso esfera):  
 $V_L$ (volumen de muestra de aceite):  
 $W_L$ (peso de muestra de aceite):

medida indirecta

$$r = d / 2:$$

$$R = D / 2:$$

$$\rho_e = \frac{3 \cdot W_e}{4\pi \cdot r^3 \cdot g}:$$

$$\rho_L = \frac{W_L}{V_L \cdot g}:$$

asumidos

$g$ :

### Variables

intervención directa

$n$ número de medición												
variable independiente altura $y_i$												
variable dependiente tiempo $t_i$												

otras variables intervinientes:

$T_i$  (temperatura inicial del aceite):  
 $T_f$  (temperatura final del aceite):

## COEFICIENTE DE DILATACIÓN LINEAL

### 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

#### 1.1 INTRODUCCIÓN

La mayoría de los materiales se expanden cuando son calentados en un rango de temperatura donde no ocurren cambios de fase. La adición de calor incrementa la amplitud promedio de la vibración de los átomos en el material, lo cual incrementa la separación promedio entre los átomos. Consideremos un objeto de longitud  $L$  el cual experimenta un cambio de temperatura  $\Delta T$ . Si  $\Delta T$  es razonablemente pequeño el cambio en la longitud  $\Delta L$ , es generalmente proporcional a  $L$  y  $\Delta T$ .

Matemáticamente:  $\Delta L = L_2 - L_1 = \alpha \cdot L_1 \cdot (T_2 - T_1) = \alpha \cdot L_1 \cdot \Delta T$ , o sea:  $\Delta L = \alpha \cdot L_1 \cdot \Delta T$  (1)

Al ser  $T_2 > T_1$  entonces:  $L_2 > L_1$ . (figura 1)

$$L_2 = L_1 + \Delta L = L_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (2)$$

Donde  $\alpha$  es llamado el coeficiente de expansión lineal del material. En materiales isotrópicos  $\alpha$  [ $1/^\circ\text{C}$ ] no depende de la dirección en la que se mide la expansión, aunque  $\alpha$  puede depender de la temperatura. Los materiales con los cuales trabajaremos son isotrópicos y, en el rango de temperatura en que se realizarán los experimentos, el coeficiente de expansión prácticamente no varía con la temperatura. Nótese que la expansión del cuerpo se da en las tres direcciones del espacio.

En el presente experimento se introducirá al termistor como elemento sensor de temperatura, y al reloj comparador como medidor de desplazamientos.

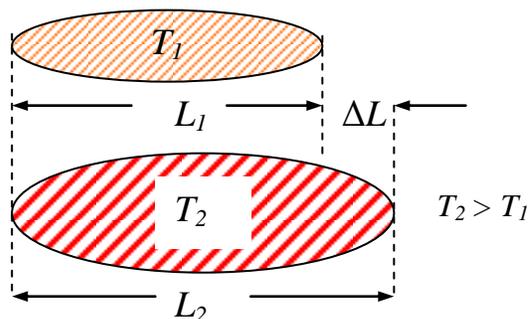


figura 1: representación de la dilatación de los cuerpos

#### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

La temperatura es el valor medio de la energía cinética de las partículas de un cuerpo.

Una vez que el calor se transmite o propaga a un cuerpo, la temperatura del mismo se incrementa y de este modo, propiedades del cuerpo tienden a cambiar, entre ellas se pueden mencionar variaciones de:

- Volumen
- Resistencia eléctrica
- Presión
- Radiación
- Otros

En el presente experimento se evaluará la variación en una de las longitudes de un cuerpo cuyo volumen se modifica por un cambio de su temperatura. Los metales son materiales isotrópicos, por lo tanto se emplearán tubos cilíndricos de cobre, aluminio y hierro galvanizado, por cuyo interior se hará circular vapor de agua a presión atmosférica, vale decir que se mantendrá el interior de los tubos a temperatura constante correspondiente a la de ebullición.

En la figura 2 se aprecia el equipo a emplearse, el tubo permite por sus boquillas (1) y (2) entrada de vapor proveniente del vaporizador a través de una manguerita y evacuación de vapor respectivamente. Al mantener fijo uno de sus soportes y el otro libre en contacto con un rodillo desplazador de un reloj comparador, se puede medir en todo momento la variación de longitud  $\Delta L$  del tubo cuando éste cambie de longitud.

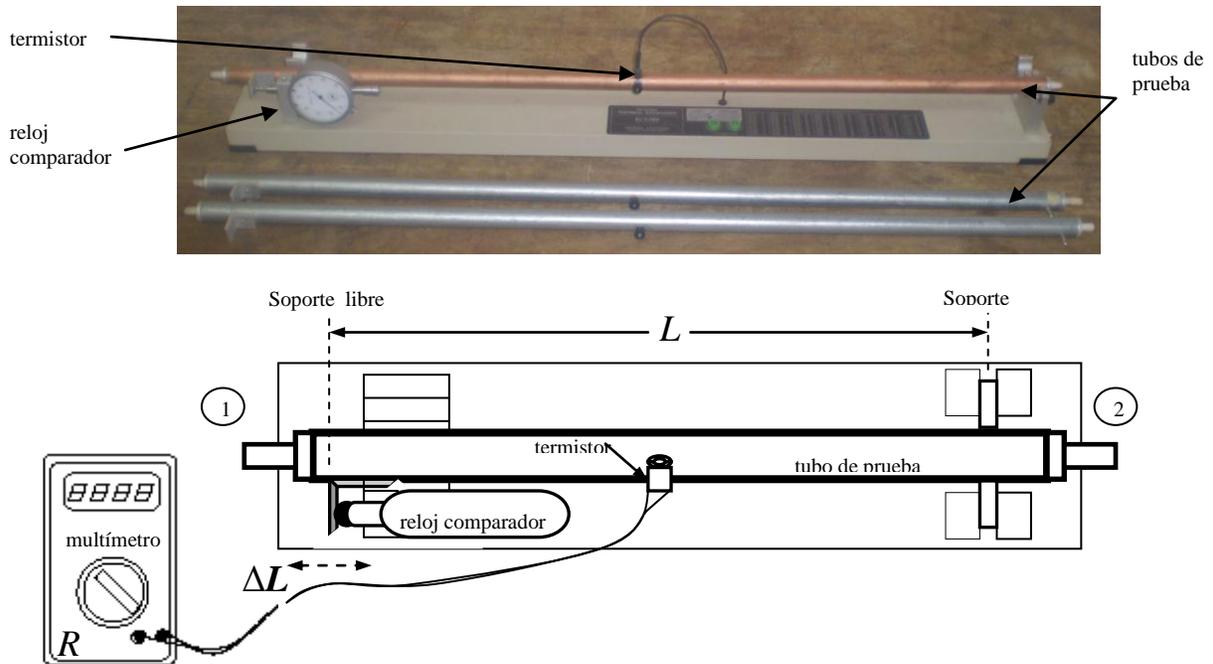


figura 2: dilatómetro (vistas: física y esquemática)

Para obtener lecturas de la  $\Delta L$  para cada  $\Delta T$ , se requieren instrumentos de medida de rápida respuesta, pues las lecturas deben corresponder al mismo instante de la medición. El calibre tipo reloj responderá inmediatamente a los cambios de longitud, sin embargo en la medida de la temperatura existe la dificultad de encontrar un instrumento de respuesta rápida. Debemos desechar la idea de emplear un termómetro de mercurio, pues el tiempo de respuesta de este instrumento es muy largo es decir, es muy lento. Ello se debe a que el calor debe primero propagarse o transferirse a través del vidrio y luego a través del mercurio mismo, ello permitirá subir la energía cinética de sus átomos hasta que el incremento de la temperatura produzca la dilatación en la columna de mercurio. Ese proceso puede tomarle a este instrumento un tiempo mayor al minuto, excesivamente grande para poder conocer la temperatura instantánea de un cuerpo cuyo valor está cambiando permanentemente en el tiempo, como es el caso del experimento a realizarse.

Los cuerpos poseen la propiedad resistividad " $\rho$ ", ésta se refiere a la oposición o freno que ofrecen al paso de corriente eléctrica, por ejemplo los metales como la plata, el cobre y aluminio son buenos conductores de corriente eléctrica, consecuentemente tienen una baja resistividad. Esta propiedad varía con la temperatura.

Además de la resistividad " $\rho$ " que es una propiedad propia de cada material, las características geométricas del cuerpo son importantes también para determinar la resistencia total " $R$ ", según la expresión:

$$R = \rho \frac{L}{A}, \quad (3) \text{ donde:}$$

- $R$  : Resistencia en  $[\Omega]$
- $\rho$  : Resistividad en  $[\Omega \text{ m}]$
- $L$  : Distancia entre los puntos de medida en  $[\text{m}]$
- $A$  : La sección transversal del cuerpo en  $[\text{m}^2]$

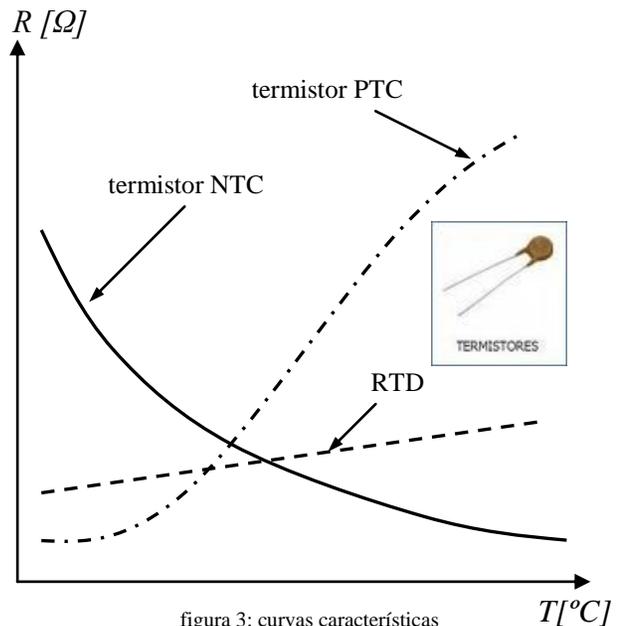


figura 3: curvas características

COEFICIENTE DE RESISTENCIA DE TEMPERATURA, generalmente llamado coeficiente de temperatura es la razón de cambio de resistencia al cambio de temperatura. Un coeficiente positivo significa que la resistencia aumenta a medida que aumenta la temperatura. Si el coeficiente es constante, significa que el factor de proporcionalidad entre la resistencia y la temperatura es constante y que la resistencia y la temperatura se graficarán en una línea recta.

Cuando se usa un alambre de metal puro para la medición de temperatura, se le refiere como detector resistivo de temperatura, termoresistencia o RTD (por las siglas en inglés de Resistive Temperature Detector). Los metales puros tienen un coeficiente de resistencia de temperatura positivo bastante constante como se ve en la figura 3.

Cuando se usan óxidos metálicos (empleados en elementos electrónicos) para la medición de temperatura, el material de óxido metálicos conformado en forma que se asemejan a pequeños bulbos o pequeños capacitores. El dispositivo formado así se llama Termistor. Los termistores NTC tienen coeficientes de temperatura negativos grandes que no son constantes como se ve en la figura 3. En otras palabras, el cambio de resistencia por unidad de cambio de temperatura es mucho mayor que para el metal puro, pero el cambio es en la otra dirección: la resistencia disminuye a medida que se aumenta la temperatura. El hecho de que el coeficiente no sea constante significa que el cambio en la resistencia por unidad de cambio de temperatura es diferente a diferentes temperaturas. En cambio los termistores PTC tienen coeficientes de temperatura positivos que varían drásticamente en función a la temperatura como se ve en la figura 3.

Como regla general, los termistores son preferibles cuando la banda de temperaturas esperada es angosta, mientras que los RTD son preferibles cuando la banda de temperatura esperada es amplia. Además de ello el tiempo de respuesta de los termistores es bajo, condiciones importantes para el presente experimento.

Consecuentemente se empleará en el presente experimento un termistor para la medida de la temperatura del tubo, conectándolo al mismo con una tuerca y midiendo con el ohmiómetro del multímetro el valor de su resistencia, tal como se muestra en la figura 2 (solicitar ayuda del docente para el uso del multímetro o tester del inglés).

NOTA: La tabla 1 muestra la relación entre  $T$  y  $R$  del termistor a emplearse en el experimento.

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Debe validarse la ecuación  $\Delta L = \alpha \cdot L_1 \cdot \Delta T$  (4), si hacemos  $K = \alpha \cdot L_1$  (5), tenemos  $\Delta L = K \cdot \Delta T$  (6),

La ecuación (6) representa a una recta de la forma  $y = a + b \cdot x$  con corte en la ordenada "a" igual a cero y pendiente "b" igual a  $K$ , de donde puede despejarse el valor de  $\alpha$ .

#### ERROR DE LA ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS REFERENCIALES

"a" (de la regresión lineal)

Hipótesis nula  $H_0$ :  $a = 0$

Hipótesis alternativa  $H_1$ :  $a \neq 0$  Bilateral o de dos colas

"b" (de la regresión lineal).  $K = \alpha \cdot L_1$  ( $L_1$  es la longitud inicial)

Tubo de hierro galvanizado  $\alpha = 1,16 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  (referencial):

Hipótesis nula  $H_0$ :  $b = K = 1,16 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$

Hipótesis alternativa  $H_1$ :  $b = K \neq 1,16 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$  Bilateral o de dos colas

Tubo de aluminio  $\alpha = 2,36 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  (referencial):

Hipótesis nula  $H_0$ :  $b = K = 2,36 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$

Hipótesis alternativa  $H_1$ :  $b = K \neq 2,36 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$  Bilateral o de dos colas

Tubo de cobre  $\alpha=1,66 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  (referencial):

Hipótesis nula  $H_0$ :  $b = K = 1,66 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$

Hipótesis alternativa  $H_1$ :  $b = K \neq 1,66 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$  Bilateral o de dos colas

## 1.4 OBJETIVOS

- Validar la ecuación de dilatación lineal para bajos rangos de temperatura en materiales isotrópicos.
- Encontrar el coeficiente de dilatación lineal del cobre, aluminio y hierro galvanizado.

## 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Dilatómetro incluye:
  - Una base para soportar tubos de los cuales se desea encontrar el coeficiente de dilatación lineal.
  - Tres tubos de cobre, hierro galvanizado y aluminio con rosca para conectar el termistor.
  - Termistor conectado a bornes para conexión al multímetro.
  - Reloj comparador.
- Generador de vapor con manguera de conexión al tubo.
- Multímetro para medir la resistencia del termistor.
- Recipiente para recibir el agua que drenan los tubos y su manguera de conexión.
- Cinta métrica

### 1.5.2 PROCEDIMIENTO PREVIO

La figura 4 muestra la vista frontal del calibre tipo reloj, que se emplea para la medición de  $\Delta L$ . Es importante familiarizarse con este instrumento antes de tomar medidas, debe desplazarse cuidadosamente el rodillo para visualizar la señalización del reloj. Verifique:

- Qué distancia corresponde a una vuelta del marcador.
- Cuál es el rango de medida de  $\Delta L$ .
- Cómo posicionar en cero el reloj.



figura 4: reloj comparador

Para familiarizarse con el termistor, agarre al mismo y, lea con el ohmímetro su correspondiente temperatura corporal. Debido a que el proceso de enfriamiento es más fácil de controlar en ausencia de vapor que el proceso de calentamiento del tubo, se hace más conveniente tomar las medidas de  $(T, \Delta L)$  después de haber calentado el tubo con el vapor y éste está en el proceso de enfriamiento. Los resultados que se obtienen del enfriamiento serían iguales que en el proceso de calentamiento, cuando los fenómenos físicos tienen esta característica, se dice que no tienen histéresis.

**PROCESO DE CALENTAMIENTO:** Vierta agua en el generador de vapor (calentador eléctrico figura 5) y conecte el mismo hasta para que el agua incremente su temperatura y vierta vapor a través de una manguerita conectada en de los niples de su tapa. La temperatura del vapor no puede exceder la temperatura de ebullición al estar en contacto con la atmósfera. Conecte el extremo libre de la manguerita en las terminales (1) ó (2) del dilatómetro (figura 2), colocar una cuña en dicho extremo para que este lado del dilatómetro quede más elevado y permita evacuar la condensación del vapor por el otro extremo donde deberá colocarse un recipiente. Tome previsiones para no quemarse con el vapor.



figura 5: calentador eléctrico

Entonces podrá apreciar que el tubo se dilata y el reloj comparador debe registrar un  $\Delta L$ , si no se registrara tal, es posible que el rodillo del reloj comparador no esté haciendo buen contacto con el tope (soporte libre) del tubo o éste ya no se pueda desplazar por haber llegado hasta el extremo de su recorrido.

Luego de verificar la correcta operación del reloj comparador, desconecte la manguera del tubo para permitir al mismo enfriarse.

En ese mismo instante registre en simultaneidad:

- $L_I$  : Con una regla graduada, la distancia entre el extremo fijo del soporte y el libre del tope como se muestra en la figura 2.
- $R_I$  : Con el multímetro, la resistencia del termistor.
- $\Delta L$  : Posicionar en cero el reloj comparador.

### 1.5.3 OBTENCIÓN DE MEDIDAS DE LAS VARIABLES

1. Mientras se enfría el tubo se debe sincronizar la lectura del calibre tipo reloj y el multímetro.
2. Registrar los pares de datos ( $R$ ,  $\Delta L$ ).
3. Cuando el tubo está a temperatura próxima a la del ambiente, ésta se estabilizará y la adquisición de datos habrá terminado con el tubo.
4. Repita todo el procedimiento (desde el calentamiento) con los tubos de otro material cuyo coeficiente de dilatación lineal se quiere determinar.

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 CÁLCULOS

- Determine el valor de las temperaturas en el tubo a partir de los valores de resistencia eléctrica obtenidas con el multímetro. Para ello debe hacer uso de la tabla 1 proporcionada por los fabricantes del termistor.
- Interpolación: Para hallar valores de temperatura intermedios a los que aparecen en la tabla anterior basta suponer que la curva se comporta de manera lineal en intervalos pequeños. Así, por ejemplo, si obtenemos el valor  $R$  para la resistencia, la temperatura  $T_i$  estará entre las temperaturas  $T_{i-1}$  y  $T_{i+1}$ , asociadas a los valores de resistencia consecutivos  $R_{i-1}$  y  $R_{i+1}$  de la tabla tales que  $R_{i+1} > R_i > R_{i-1}$ . Suponiendo linealidad para intervalos pequeños, se obtiene la siguiente expresión que nos recuerda a la ecuación de la recta con dos puntos conocidos de la geometría analítica:

$$\frac{T_i - T_{i-1}}{R_i - R_{i-1}} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{R_{i+1} - R_{i-1}} \quad ; \quad \text{es decir: } T_i = \left[ \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{R_{i+1} - R_{i-1}} \cdot (R_i - R_{i-1}) \right] + T_{i-1}$$

Opcionalmente puede realizar un ajuste por regresión de los puntos de la tabla 1 para obtener una ecuación exponencial y emplearla para encontrar los valores de  $T_i$  mediante el uso de la ecuación obtenida.

- Regresión lineal en la forma:  $y = a + b \cdot x$  ó  $\Delta L = K \cdot \Delta T$ , con  $n$  medidas, donde:  $\Delta L_i$  y  $\Delta T_i$  son  $L_I - L_i$  y  $T_I - T_i$  respectivamente.

$$\Delta L = \frac{\sum \Delta T_i^2 \sum \Delta L_i - \sum \Delta T_i \sum \Delta L_i \Delta T_i}{n \sum \Delta T_i^2 - (\sum \Delta T_i)^2} + \frac{n \sum \Delta T_i \Delta L_i - \sum \Delta T_i \sum \Delta L_i}{n \sum \Delta T_i^2 - (\sum \Delta T_i)^2} \times \Delta T \quad (7)$$

$$r = \frac{n \sum \Delta L_i \Delta T_i - \sum \Delta T_i \sum \Delta L_i}{\sqrt{\left[ n \sum \Delta T_i^2 - (\sum \Delta T_i)^2 \right] \cdot \left[ n \sum \Delta L_i^2 - (\sum \Delta L_i)^2 \right]}} \quad (8), \text{ coeficiente de correlación}$$

- Trace en un solo gráfico  $\Delta L$  vs  $\Delta T$ , registre los valores determinados experimentalmente, la recta ajustada a dichos valores y el  $\Delta L$  vs  $\Delta T$  teórico ( $\alpha$  referenciales indicados en la hipótesis).
- De la ecuación:  $\Delta L = a + b \cdot \Delta T$ , donde  $a$  debe ser cero se emplea para validar la ecuación de dilatación lineal y  $b=K$  para determinar el valor de  $\alpha$ .

Resistencia (k $\Omega$ )	Temp. ( $^{\circ}$ C)						
351.020	0	95.447	26	30.976	52	11.625	78
332.640	1	91.126	27	29.756	53	11.223	79
315.320	2	87.022	28	28.590	54	10.837	80
298.990	3	83.124	29	27.475	55	10.467	81
283.600	4	79.422	30	26.409	56	10.110	82
269.080	5	75.903	31	25.390	57	9.7672	83
255.380	6	72.560	32	24.415	58	9.4377	84
242.460	7	69.380	33	23.483	59	9.1208	85
230.260	8	66.356	34	22.590	60	8.8160	86
218.730	9	63.480	35	21.736	61	8.5227	87
207.850	10	60.743	36	20.919	62	8.2406	88
197.560	11	58.138	37	20.136	63	7.9691	89
187.840	12	55.658	38	19.386	64	7.7077	90
178.650	13	53.297	39	18.668	65	7.4562	91
169.950	14	51.048	40	17.980	66	7.2140	92
161.730	15	48.905	41	17.321	67	6.9806	93
153.950	16	46.863	42	16.689	68	6.7559	94
146.580	17	44.917	43	16.083	69	6.5394	95
139.610	18	43.062	44	15.502	70	6.3308	96
133.000	19	41.292	45	14.945	71	6.1298	97
126.740	20	39.605	46	14.410	72	5.9361	98
120.810	21	37.995	47	13.897	73	5.7493	99
115.190	22	36.458	48	13.405	74	5.5693	100
109.850	23	34.991	49	12.932	75		
104.800	24	33.591	50	12.479	76		
100.000	25	32.253	51	12.043	77		

tabla 1:Característica T vs R del termistor a emplearse en laboratorio (el punto representa separación decimal)

## 2.2 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

### ERROR DE LA ESTIMACIÓN

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|a-0|}{s_a}$ ,

$$\text{donde: } s_a = s_{\Delta L/\Delta T} \times \sqrt{\frac{\sum \Delta T_i^2}{n \sum \Delta T_i^2 - (\sum \Delta T_i)^2}} ; \quad s_{\Delta L/\Delta T} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot \Delta T_i) - \Delta L_i]^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n - 2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas: *t de tablas*:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse: *t calculado* < *t de tablas*.

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la ecuación de dilatación lineal no ha sido validada porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas).

De la regresión lineal se obtiene  $b$ , pero:  $b = K = \alpha \cdot L_1$ , es decir:  $\alpha = \frac{K}{L_1}$

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|K_{exp} - K_{teo}|}{s_b}$ , donde:

$K_{teo}$  es:

- $b = K = 1,16 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$  hierro galvanizado
- $b = K = 2,36 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$  aluminio
- $b = K = 1,66 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \cdot L_1$  cobre

$$s_b = \frac{s_{\Delta L/\Delta T}}{\sqrt{\sum \Delta T_i^2 - \frac{1}{n} (\sum \Delta T_i)^2}} , \quad s_{\Delta L/\Delta T} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot \Delta T_i) - \Delta L_i]^2}{n - 2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas: *t de tablas*:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse: *t calculado* < *t de tablas*.

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la ecuación de dilatación lineal no ha sido validada porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas).

## 2.3 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

- 1 ¿Por qué no tiene influencia la medida del diámetro de los tubos en el experimento?
- 2 ¿Cómo influye el espesor de los tubos en el experimento?, ¿qué sucede si se cambian los tubos del experimento por unos más robustos (mayor espesor)?
- 3 Si no se validó la ecuación de dilatación lineal, ¿podría mencionar las causas del error sistemático?
- 4 ¿Es el termistor del tipo NTC o PTC?, ¿el comportamiento del termistor es lineal o exponencial? Sugerencia: Grafique con algunos puntos representativos de la tabla 1.
- 5 ¿Por qué el proceso de enfriamiento es más lento que el de calentamiento?
- 6 La dilatación lineal no presenta histéresis, cite algún fenómeno físico en el que sí hay histéresis.
- 7 Explique cómo se aplica la propiedad de dilatación lineal para construir termostatos bimetalicos.
- 8 Realice la conversión de los valores de los  $\alpha$  en [ $^\circ\text{C}^{-1}$ ] obtenidos en laboratorio a [ $^\circ\text{F}^{-1}$ ] y [ $^\circ\text{K}^{-1}$ ].
- 9 ¿Encontró diferencia en el tiempo de respuesta (cuán rápido es el calentamiento o enfriamiento) entre un material y otro?, comente la influencia de la conductividad y calor específico del material.
- 10 ¿Por qué cree que las estructuras de hormigón armado (concreto con hierro de construcción), no se fisuran con los cambios de temperatura?

## COEFICIENTE DE DILATACIÓN LINEAL

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

**Parámetros o constantes**  
medida directa

**Material:**  
medida indirecta

$L_1$ (longitud del tubo antes de enfriar):  
 $R_1$ (Resistencia del termistor antes de enfriar):

$T_1$ (obtenida de tabla 1 para  $R_1$ ):

**Variables**  
intervención directa

$n$ número de medición													
variable independiente resistencia $R_i$ (medida indirecta de $T$ )													
variable dependiente deformación $\Delta L_i$													

**Parámetros o constantes**  
medida directa

**Material:**  
medida indirecta

$L_1$ (longitud del tubo antes de enfriar):  
 $R_1$ (Resistencia del termistor antes de enfriar):

$T_1$ (obtenida de tabla 1 para  $R_1$ ):

**Variables**  
intervención directa

$n$ número de medición													
variable independiente resistencia $R_i$ (medida indirecta de $T$ )													
variable dependiente deformación $\Delta L_i$													

**Parámetros o constantes**  
medida directa

**Material:**  
medida indirecta

$L_1$ (longitud del tubo antes de enfriar):  
 $R_1$ (Resistencia del termistor antes de enfriar):

$T_1$ (obtenida de tabla 1 para  $R_1$ ):

**Variables**  
intervención directa

$n$ número de medición													
variable independiente resistencia $R_i$ (medida indirecta de $T$ )													
variable dependiente deformación $\Delta L_i$													

# COEFICIENTE DE CONDUCTIVIDAD TÉRMICA

## 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

La Segunda Ley de la termodinámica tiene variadas connotaciones, entre ellas el hecho de que si un cuerpo está a una temperatura mayor que otro, el primero cederá calor al segundo, este proceso es conocido como transferencia o propagación del calor.

Existen tres formas en que el calor se propaga, éstas son:

- Conducción
- Radiación
- Convección

En el presente experimento se estudiará la propiedad de los cuerpos para conducir calor por conducción, la ecuación fundamental para evaluar este proceso la define Fourier con:

$$H = -k \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

Donde:

- $H$ : Flujo calorífico o  $\Delta Q/\Delta t$ , cantidad de calor que se propaga por unidad de tiempo en [J/s] o [W]
- $k$ : Coeficiente de conductividad térmica [W/m°C]
- $A$ : Área o sección por la cual se propaga el calor [m<sup>2</sup>]
- $dT/dx$ : Gradiente de temperatura (variación de temperatura en dirección de la propagación) en [°C/m]

El coeficiente de conductividad térmica “ $k$ ” depende del material y es más elevado entre los metales por tener éstos mayor cantidad de electrones libres. Idealmente un conductor perfecto tiene  $k = \infty$ , mientras que un aislador perfecto  $k = 0$ . En el experimento se determinará este coeficiente para diferentes materiales.

### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

Para integrar la ecuación 1, se debe identificar a los parámetros constantes y variables. Si se trata por ejemplo de analizar una pared plana y espesor constante como se muestra en la parte superior de la figura 1, tenemos a:  $A$  y  $L$  constantes. En el material  $k$  también es constante.

Después de haber mantenido las caras de la pared durante tiempo suficiente a las temperaturas  $T_1$  y  $T_2$ , se encuentra que la temperatura en los puntos interiores de la pared disminuye uniformemente con la distancia, desde la cara caliente a la fría (representación inferior de la figura 1). Sin embargo, en cada punto permanece constante la temperatura en todo momento, se dice que la pared se halla en un **estado estacionario**, consecuentemente el valor de flujo de calor  $H$  se hace constante también.

Integrando la ecuación (1), tenemos:  $H \cdot \int_0^L dx = -k \cdot A \cdot \int_{T_2}^{T_1} dT$ , es decir:

$$H = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{k \cdot A}{L} \cdot (T_2 - T_1) \quad (2), \quad \text{nótese } T_2 > T_1$$

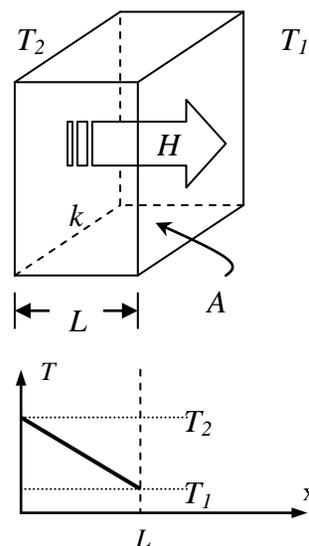


figura 1: conducción por pared plana

En muchas situaciones, la ecuación (2) se prefiere escribir en función de la resistencia térmica “R”, análoga a la resistencia eléctrica, pero en este caso es la propiedad de los cuerpos para oponerse a la propagación del calor por conducción y la definimos:  $R = \frac{L}{k \cdot A}$  (3), al reemplazar la ecuación (3) en (2) nos queda:  $H = \frac{T_2 - T_1}{R}$  (4)

La expresión (4) es útil a la hora de tratar varias paredes colocadas una tras otra (en serie). Así por ejemplo, en la figura 2 se muestra un conjunto de láminas colocadas en serie con diferente  $k$ . Para esta situación el cálculo de propagación de flujo de calor por conducción se facilita si primeramente se calcula la resistencia térmica  $R_i$ , para cada pared y luego aplicamos:

$$H = \frac{(T_2 - T_1)}{\sum_1^n R_i} \quad (5), \text{ o sea: } H = \frac{(T_2 - T_1)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

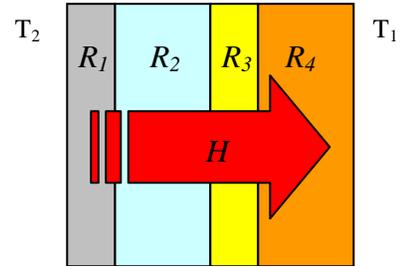


figura 2: conducción en láminas en serie

En la práctica resulta difícil encontrar procesos de conducción en **estado estacionario**, pues las temperaturas en los extremos de las láminas  $T_2$  y  $T_1$  respectivamente, no son constantes están en permanente cambio y el gradiente de temperatura  $\frac{dT}{dx}$  tampoco llega a ser una constante, por lo tanto en el experimento debe idearse la manera de asegurar que los valores de  $T_2$  y  $T_1$  se mantengan fijos y así aplicar directamente la ecuación (2).

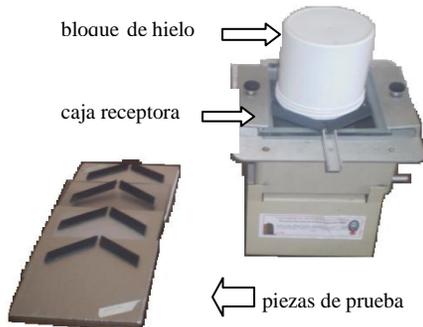


figura 3: equipo de laboratorio

Afortunadamente, la naturaleza brinda procesos físicos en los cuales, la temperatura se mantiene constante, y éstos son los cambios de estado de la materia, por ejemplo el agua mantiene su temperatura en 0 y 100°C mientras cambia de sólido a líquido y de líquido a vapor respectivamente, cuando el proceso se lleva a cabo a presión atmosférica correspondiente a la del nivel del mar.

En la figura 4, se muestra el concepto del experimento a realizarse, si llamamos “pieza de prueba” a la placa plana cuyo material tiene un coeficiente de conductividad  $k$  que se desea determinar.

Al colocar un hielo en proceso de derretimiento en la parte superior de la pieza de prueba y vapor de agua a presión atmosférica en la parte inferior aseguramos que  $T_2$  en A sea la temperatura de ebullición del agua a la presión atmosférica donde se realiza el experimento y  $T_1$  en B, la temperatura de fusión del agua cuando éste está derretándose también a presión atmosférica. Para grandes altitudes, la temperatura de ebullición del agua se modifica sustancialmente, no así la temperatura de fusión de esta sustancia.

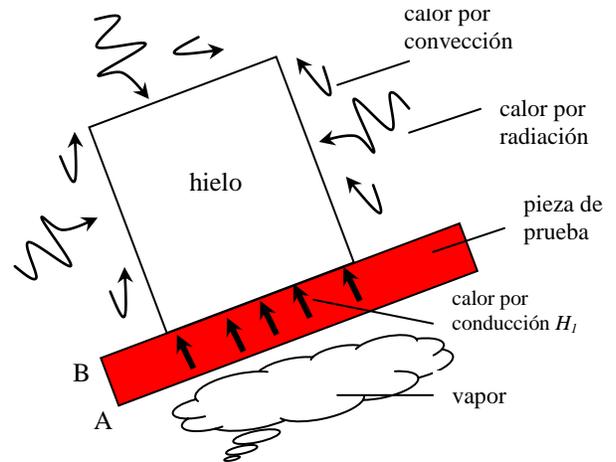


figura 4: conducción de calor de la cara A hacia la cara B de la placa

Por otra parte, el flujo de calor que recibe el hielo “ $H_1$ ” proveniente del vapor y propagándose por conducción a través de la pieza de prueba, coadyuva en el proceso de derretimiento del hielo. Sin embargo, como se ve en la figura 4, el hielo no se derrite sólo con el flujo de calor  $H_1$  que recibe a través de la pieza de prueba, sino también del medio circundante cuya temperatura ambiente es mayor que la del hielo, como se aprecia en la figura, el hielo está recibiendo flujo de calor  $H_2$  por radiación, convección y conducción del medio ambiente que contribuye en el derretimiento del hielo.

Llamémosle:

$\dot{m}_1 = \frac{\Delta m_1}{\Delta t_1}$ , la masa de hielo que se derrite por unidad de tiempo, debido al flujo de calor  $H_1$ , que recibe dicho

hielo por conducción a través de la pieza de prueba.

$\dot{m}_2 = \frac{\Delta m_2}{\Delta t_2}$ , la masa de hielo que se derrite por unidad de tiempo, debido al flujo de calor  $H_2$ , que recibe dicho

hielo por radiación, convección y conducción del medio ambiente. La radiación es el medio por el cual se propaga casi todo el valor de  $H_2$ .

El valor de  $\dot{m}_2$ , se puede encontrar experimentalmente dejando al hielo simplemente apoyado sobre la pieza de prueba y evacuando en un recipiente graduado la masa  $\Delta m_2$  de hielo que se derrite por el flujo de calor que recibe del medio ambiente en un determinado tiempo  $\Delta t_2$ .

El valor de  $\dot{m}_1$ , se encuentra experimentalmente sometiendo a la cara inferior de la pieza de prueba, a la temperatura del vapor de agua, por lo tanto el hielo se derretirá por el flujo de calor que recibe a través de esta pieza

más el flujo de calor que obtiene del medio ambiente, es decir:  $\dot{m}_T = \dot{m}_1 + \dot{m}_2$  (6),  $\dot{m}_T$  se obtiene evacuando en un recipiente graduado la masa total  $\Delta m_T$  de hielo derretido por el flujo de calor que gana éste del medio ambiente y

de la pieza de prueba en un  $\Delta t_2$ . Por lo tanto:  $\dot{m}_1 = \dot{m}_T - \dot{m}_2$  (7)

Por otra parte, se sabe que la cantidad de calor necesario para cambiar de fase hielo a líquido el agua (derretimiento), está dado por:  $\Delta Q = \lambda_{FUSIÓN} \cdot \Delta m$  (8), si dividimos esta ecuación entre  $\Delta t$  nos queda:

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda_{FUSIÓN} \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t}$  (9), ahora si:  $\frac{\Delta Q_1}{\Delta t_1} = H_1$  (10) es el flujo de calor que recibe el hielo debido a la

conducción por la pieza de prueba, entonces de (9) y (10) quedaría:  $H_1 = \lambda_{FUSIÓN} \cdot \frac{\Delta m_1}{\Delta t_1} = \lambda_{FUSIÓN} \cdot \dot{m}_1$  (11),

luego reemplazamos (7) en (11), quedando:  $H_1 = \lambda_{FUSIÓN} \cdot (\dot{m}_T - \dot{m}_2)$  (12), finalmente reemplazamos la

ecuación de propagación de calor por conducción (2) en (12) para obtener:

$\frac{k \cdot A}{L} (T_2 - T_1) = \lambda_{FUSIÓN} \cdot (\dot{m}_T - \dot{m}_2)$ , despejando  $k$ , queda:

$$k = \frac{\lambda_{FUSIÓN} \cdot L}{A \cdot (T_2 - T_1)} \cdot (\dot{m}_T - \dot{m}_2) \quad (13), \text{ donde:}$$

$k$  : coeficiente de conductividad de la pieza de prueba

$L$  : espesor de la pieza de prueba por la cual se propaga el calor por conducción

$A$  : área de la base del hielo que está en contacto con la pieza de prueba

$T_2$  : temperatura de ebullición del agua en el lugar donde se realiza el experimento

$T_1$ : temperatura de fusión del agua si el hielo está en proceso de derretimiento

- $m_T$  : masa de hielo por unidad de tiempo que se derrite por el aporte de flujo calorífico provenientes del medio ambiente más el que se gana a través de la pieza de prueba.

- $m_2$  : masa de hielo por unidad de tiempo que se derrite por el flujo de calor que gana del medio ambiente.

Las últimas dos variables son obtenidas experimentalmente, mientras que las otras se toman como constantes.

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

La validación estadística de la ecuación (13) para determinar  $k$ , requiere la realización de varios ensayos, situación que en la práctica se dificulta, ya que no se dispone de la cantidad suficiente de bloques de hielo para realizar el experimento con varias piezas de prueba.

Consecuentemente, la validación de la hipótesis consistirá en determinar que el valor de “ $k$ ” depende del material, para ello se realizarán pruebas en piezas de prueba de diferentes materiales y verificar que éstos son significativamente diferentes.

### 1.4 OBJETIVO

- Encontrar el coeficiente de conductividad térmica por conducción “ $k$ ” para diferentes materiales.

### 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

#### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Caja receptora de vapor con los siguientes accesorios:
  - Niples de conexión para manguera (para introducir y evacuar vapor de agua).
  - Apertura en la parte superior (para que el vapor entre en contacto con la pieza de prueba).
  - Plaquetas de sujeción (para sostener la pieza de prueba).
  - Soporte base (para sostener a la caja receptora con inclinación para evacuar hielo derretido).
- Generador de vapor con manguera para conexión a los niples de la caja receptora de vapor.

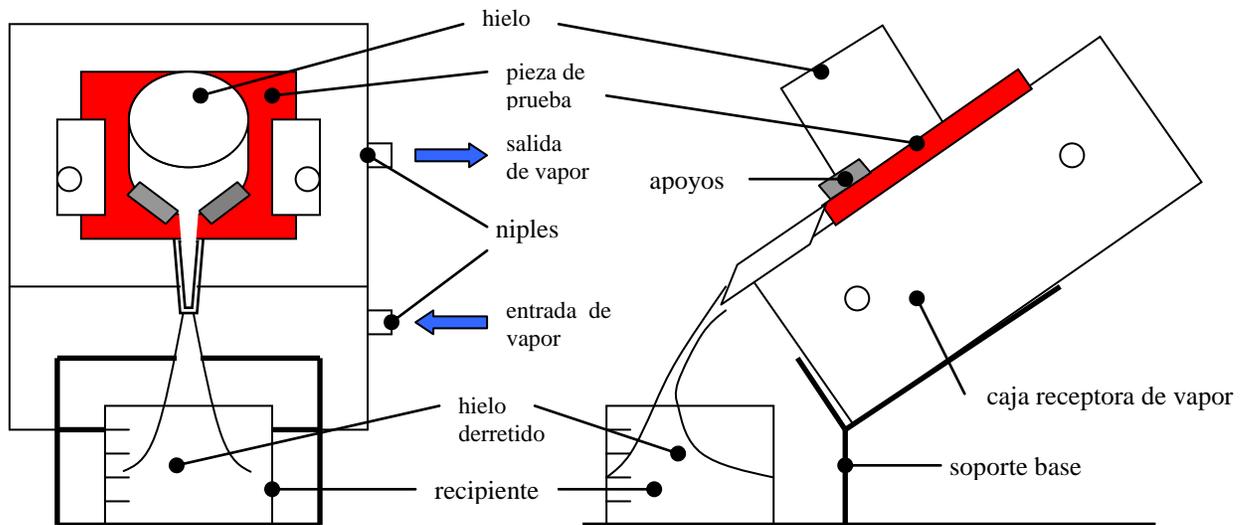


figura 5: vista frontal del sistema

figura 6: vista lateral del sistema

- Recipiente para verter el hielo derretido
- Balanza (para determinar la masa de hielo derretido).
- Piezas de prueba con revestimiento impermeable y apoyos para el bloque de hielo.
- Cronómetro
- Cilindros de hielo a 0°C (proceso de derretimiento)
- Vernier (para medida del diámetro de cilindro en su base)

### 1.5.2 PROCEDIMIENTO PREVIO

Con antelación de un día al del experimento, verter en los moldes cilíndricos agua para su congelamiento en un refrigerador, debe asegurarse que el agua sea pura y limpia, pues contaminantes alteran la temperatura de congelación.

Medir los espesores “ $L$ ” de las piezas de prueba

### 1.5.3 FLUJO DE CALOR ENTREGADO POR EL MEDIO AMBIENTE AL HIELO “ $\dot{m}_2$ ”

1. Extraer el bloque de hielo con su molde del refrigerador y dejarlo al ambiente para que la temperatura del mismo suba a la de cambio de estado, es decir que el hielo empiece a derretirse.
2. Monte la pieza de prueba sobre la caja receptora de vapor.
3. Extraer el hielo de su molde y colocarlo sobre la pieza de prueba como se muestra en la figura 5, pero sin introducir todavía vapor a la caja receptora.
4. Introducir el recipiente para verter el hielo derretido, simultáneamente registre inicio con el cronómetro, esperar derretimiento de hielo por aproximadamente 10 minutos y retirar el recipiente con el líquido vertido.
5. Pesar el agua vertida  $\Delta W_2$ , registrando el intervalo de tiempo  $\Delta t_2$ . Recuérdese que:  $\Delta m_2 = \Delta W_2 / g$ .
6. Nótese que este procedimiento se realiza una sola vez.

### 1.5.4 FLUJO DE CALOR ENTREGADO POR EL MEDIO AMBIENTE MÁS EL PROPORCIONADO POR EL VAPOR A TRAVÉS DE LA PIEZA DE PRUEBA “ $\dot{m}_T$ ”

1. Calentar agua en el generador de vapor.
2. Introducir vapor producido por el generador en la caja receptora como se muestra en la figura 5. Debe hacer uso de mangueritas conectadas en los nipples.
3. Verificar que la superficie inferior del cilindro de hielo esté plana para hacer buen contacto con la superficie de la pieza de prueba.
4. Registrar el material de la pieza de prueba.
5. Medir el diámetro de la base del cilindro de hielo “ $d_1$ ”.
6. Introducir el recipiente para verter el hielo derretido, simultáneamente registre inicio con el cronómetro, esperar derretimiento de hielo durante 5 a 10 minutos y retirar el recipiente con el líquido vertido.
7. Pesar el agua vertida  $\Delta W_T$ , registrando el intervalo de tiempo  $\Delta t_T$ .
8. Medir el diámetro de la base del cilindro de hielo “ $d_2$ ”.
9. Repetir el proceso para otras piezas de prueba desde el paso 4 de esta última parte.

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 CÁLCULOS

- Determinación de:  $\dot{m}_2$  :

Sabemos que:  $\dot{m}_2 = \frac{\Delta m_2}{\Delta t_2}$ , donde:  $\Delta m_2 = \frac{\Delta W_2}{g}$ , los valores de:  $\Delta W_2$  y  $\Delta t_2$  se miden en el experimento con la balanza y un cronómetro.

- Determinación de:  $\dot{m}_T$  :

Análogamente aplicamos:  $\dot{m}_T = \frac{\Delta m_T}{\Delta t_T}$ , donde:  $\Delta m_T = \frac{\Delta W_T}{g}$ , los valores de  $\Delta W_T$  y  $\Delta t_T$  se obtienen

a diferencia de la primera parte del experimento; con vapor circulando en la parte inferior de la pieza de prueba y se aplica para diferentes piezas de prueba.

- Determinación de los coeficientes de conductividad  $k$  de diferentes piezas de prueba:

Aplicar la ecuación (13) para cada una de las piezas de prueba para encontrar:  $k$  de diferentes materiales.

Donde:  $A = \frac{\pi}{4} \left( \frac{d_1 + d_2}{2} \right)^2$ , pues se trabaja con el área promedio

## 2.2 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

1. Si se empleara el hielo con su molde en el experimento, la ganancia de calor por radiación disminuiría puesto que el molde es de color blanco, sin embargo las ganancias por conducción suben ya que el material plástico del molde tiene un  $k$  mayor que del aire, en suma: ¿Cómo cree usted que el hielo ganará menos flujo de calor del entorno?, ¿con el molde o sin él?
2. ¿Por qué se recomienda que la superficie inferior del cilindro de hielo esté totalmente plana al momento de apoyar éste sobre la pieza de prueba para hallar su  $k$ ?
3. Indique ¿qué características en cuanto a su conductividad térmica y espesor debe cumplir el recubrimiento impermeable de las piezas de prueba para añadir el menor error sistemático posible?. Sugerencia: Realice interpretación de la ecuación (5). Si no se empleara el revestimiento impermeable en las piezas de pruebas, ¿se cometería menor error sistemático?, note que la impermeabilización impide que la pieza de prueba se humedezca debido al agua del hielo derretido y el condensado del vapor.
4. ¿Cree usted que el tiempo en que el sistema llega a su régimen permanente o estado estacionario depende de la capacidad calorífica y masa del cuerpo?, explique.
5. ¿Considera necesario el empleo de algún instrumento de medida de temperatura para verificar que el hielo está en proceso de derretimiento?
6. Si en vez de hielo a  $0^\circ\text{C}$  se empleara hielo a  $-5^\circ\text{C}$ , ¿qué errores se estarían cometiendo?. Así como el hielo puede estar a una temperatura menor a  $0^\circ\text{C}$ , podría el vapor de agua encontrarse a temperaturas mayores?, dígame por ejemplo  $120^\circ\text{C}$ .
7. Compare los promedios de  $k$  obtenidos en el experimento con referenciales obtenidos de tablas de materiales. Calcule el error porcentual.
8. ¿Cuál será la temperatura en el medio de los dos extremos ( $L/2$ ) de la pieza de prueba, cuando el gradiente de temperatura está en régimen permanente?
9. Al derretirse el hielo, la forma geométrica original de cilindro se torna en la de un cono truncado, ¿influye esto en el resultado?
10. ¿Influye la variación de la temperatura ambiente durante el desarrollo del experimento?

## COEFICIENTE DE CONDUCTIVIDAD TÉRMICA

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

### Parámetros o constantes

medida directa

*L* (espesor de las piezas de prueba):  
 $\lambda_{FUSIÓN}$  (calor latente de fusión del agua):  
 $T_1$  (temperatura de fusión del hielo):  
 $T_2$  (temperatura de ebullición del agua):  
 $g$  (constante de gravedad):

### Variables

#### Medición de “ $\dot{m}_2$ ”

medida directa

$\Delta W_2$  (peso de agua vertida por derretimiento sin vapor):

$\Delta t_2$  (intervalo de tiempo de derretimiento):

medida indirecta

$$\Delta m_2 = \frac{\Delta W_2}{g} :$$

#### Medición de “ $\dot{m}_T$ ”

Material					
variable independiente tiempo: $\Delta t_i$					
variable dependiente peso de agua $\Delta W_i$ (medida indirecta $\Delta m_i$ )					
diámetro inicial $d_1$					
diámetro final $d_2$					

Otras variables intervinientes

# DETERMINACIÓN DE GAMMA DEL AIRE

## 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

En la figura 1 se muestra el montaje instrumental original empleado en el experimento ideado por los físicos franceses Clement y Desormes en 1819 para la determinación de  $\gamma$  del aire.

La genialidad de Clement y Desormes radica en la simplicidad del experimento, no se requiere de equipos sofisticados, el mismo se basa en la aplicación de procesos notables de la termodinámica, introduciendo y retirando aire del interior de un botellón y medición de la presión del aire en su interior con un manómetro sencillo.

El presente experimento, hará uso del mismo principio conceptual y equipo similar al empleado por los físicos franceses para hallar la constante gamma del aire. El hecho de replicar un experimento llevado a cabo hace casi dos siglos, muestra que algunos principios físicos mantienen su validez incluso hoy en día.

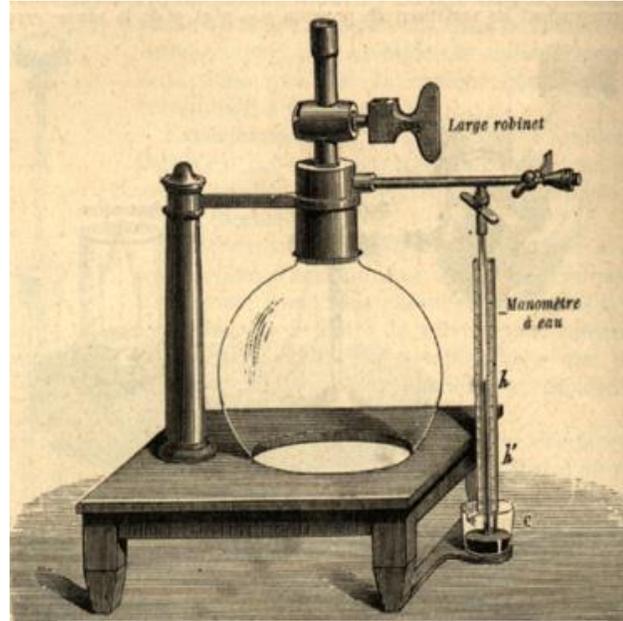


figura 1: instrumental usado por Clement y Desormes

### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO:

La temperatura de un gas puede elevarse en condiciones muy distintas. Podría por ejemplo mantenerse en el proceso el volumen constante, o bien mantener constante la presión, o puede permitirse que ambos varíen de un modo arbitrario. En cada uno de estos casos resulta diferente la cantidad de calor que se necesita para elevar un grado la temperatura de una unidad de masa de gas. En otras palabras; un gas posee distintas capacidades caloríficas, dependiendo del tipo de proceso que siguen. Sin embargo se usan dos en la práctica, que corresponden a procesos notables:

El calor específico a volumen constante “ $c_v$ ”

El calor específico a presión constante “ $c_p$ ”

El cociente de ambos, es lo que se define como  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

El valor de  $\gamma$  es 1,67 para gases monatómicos y, aproximadamente 1,40 para gases biatómicos. Para los gases poliatómicos no se cumple tal regularidad. Estrictamente hablando, los calores específicos también son una función de la temperatura [  $c = f(t)$  ].

El aire atmosférico tiene una composición volumétrica de 20,99% de  $O_2$ , 78,03% de  $N_2$ , poco menos de 1% de Ar y pequeñas cantidades de varios gases inertes. Consecuentemente el aire puede ser considerado gas diatómico pues, está compuesto básicamente por elementos biatómicos. En la ingeniería se emplean dos estándares para  $\gamma$ . El estándar de aire frío (aire común y corriente)  $\gamma = 1,4$ . Mientras que el estándar de aire caliente, útil para consideraciones de combustión  $\gamma \approx 1,3$ .

DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTAL:

El equipo de experimentación por el método de Clement y Desormes que se empleará en el experimento se muestra en la figura 2.

Un botellón de vidrio con tapa hermética y tres tubitos de ingreso. Al primero de ellos se conecta un insuflador mediante el cual, bombeando manualmente se puede suministrar aire al interior del botellón a través de la apertura A. El segundo tubito B, está abierto a la atmósfera, por éste puede escapar aire mientras se mantenga abierto. El tercero se emplea para conectar el interior del botellón con un manómetro de columna.

Cuando se necesita evitar que el aire escape del interior del botellón, debe impedirse su salida por las aperturas A y B, ya sea doblando la manguera que conecta el insuflador con el tubito en el caso de la apertura A, o cubriendo con el dedo la entrada del tubito de la apertura B, las demás conexiones deben estar bien selladas para evitar escape de aire.

El manómetro tiene una escala de medida para la columna de líquido, mismo que debe tener densidad próxima a la del agua para medir bajas presiones, además de ello, es deseable que el líquido manométrico no tenga baja "presión de vapor" para evitar su vaporización.

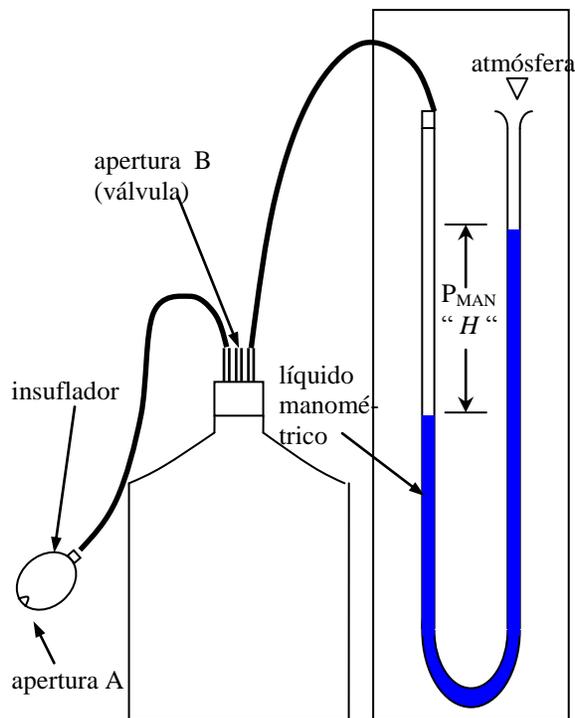


figura 2: equipo del laboratorio

DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS:

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL	INTERPRETACIÓN TERMODINÁMICA, figura 3
Botellón abierto y en equilibrio térmico con el ambiente $P_{MAN}: H_0 = 0$ (presión del aire igual a la atmosférica)	Estado A Presión: Presión atmosférica Temperatura: Temperatura ambiente
Cerrar válvula B e insuflar aire por apertura A al botellón $P_{MAN}: H_0 \rightarrow H_1$	Proceso A $\rightarrow$ B: Proceso lento aproximadamente isotérmico
Dejar de insuflar aire y cerrar apertura A $P_{MAN}: H_1$	Estado B Presión: Presión 1 Temperatura: Aproximadamente temperatura ambiente
Abrir apertura B para permitir escapar al aire del botellón $P_{MAN}: H_1 \rightarrow H_0$	Proceso B $\rightarrow$ C: Proceso rápido de expansión adiabática o enfriamiento brusco del aire
Cerrar apertura B cuando $H_1$ se iguala a $H_0$	Estado C Presión: Presión atmosférica Temperatura: Inferior a la temperatura ambiente
Mantener las aperturas cerradas $P_{MAN}: H_0 \rightarrow H_2$	Proceso C $\rightarrow$ D: Proceso isocórico, el aire frío gana calor del ambiente por conducción a través de las paredes del botellón, consecuentemente la presión sube hasta que la temperatura del aire se equilibra con la del ambiente.
El manómetro se estabiliza $P_{MAN}: H_2$	Estado D: Presión: Mayor a la presión atmosférica Temperatura: Temperatura ambiente

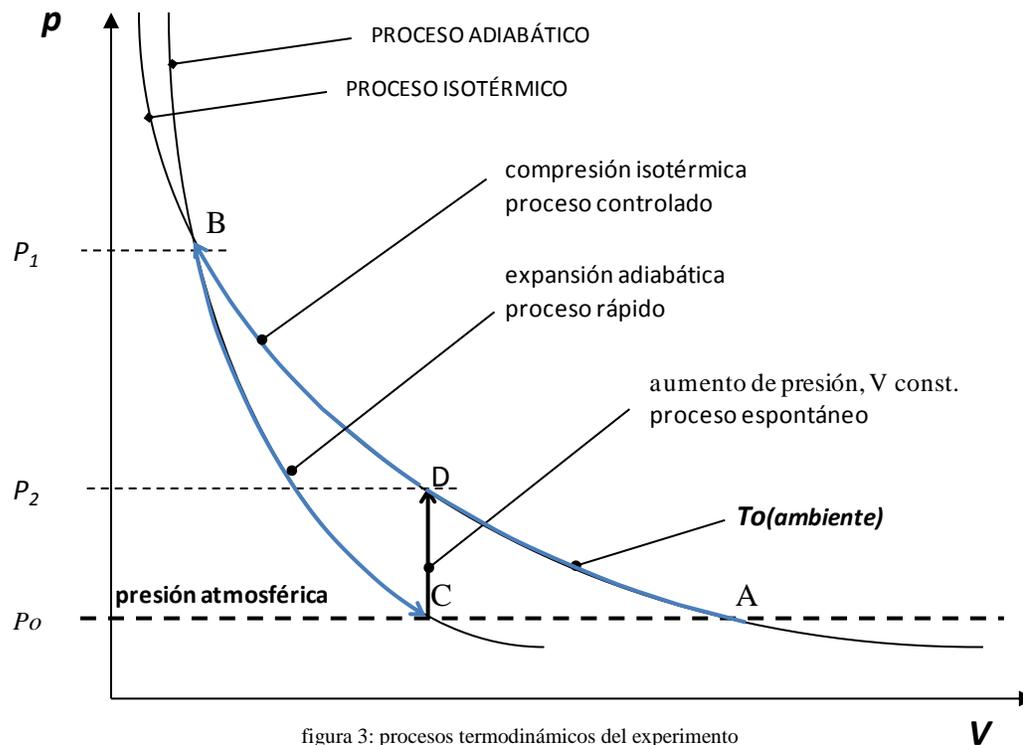


figura 3: procesos termodinámicos del experimento

Los procesos A-B y B-C corresponden a compresión y expansión respectivamente, pero al observar el botellón no se aprecia cambio de volumen. Sin embargo en dichos procesos se abren las aperturas permitiendo al aire del entorno comprimirse al ser introducido mediante la perilla y expandirse al dejar salir al aire por la apertura B. Consecuentemente se está analizando **las propiedades** de gas aire en compresión y expansión.

Los procesos que se analizarán serán el B-C, y el C-D.

Ecuaciones que rigen el proceso B-C:

$$PV^\gamma = const. \quad (1), \quad TV^{\gamma-1} = const. \quad (2), \quad \frac{P^\gamma}{T} = const. \quad (3)$$

Ecuación que rige el proceso C-D:

$$\frac{P}{T} = const. \quad (4)$$

Para eliminar la variable volumen, emplearemos las ecuaciones (3) y (4), donde:

$$P_B = P_1, \quad T_B = T_o, \quad P_C = P_o, \quad T_C = T_C, \quad P_D = P_2, \quad T_D = T_o \quad \text{del}$$

proceso adiabático:  $\left(\frac{P_1}{P_o}\right)^\gamma = \frac{T_o}{T_C}$  (5), del proceso isocórico:  $\frac{P_o}{P_2} = \frac{T_C}{T_o}$  (6), de la (5) y la (6) queda:

$$\left(\frac{P_1}{P_o}\right)^\gamma = \frac{P_2}{P_o}, \text{ aplicamos logaritmo natural para despejar } \gamma, \text{ quedando: } \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_o}\right)}{\ln\left(\frac{P_1}{P_o}\right)},$$

$$1 - \gamma^{-1} = \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_0}\right)}{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)} \rightarrow \gamma^{-1} = 1 - \frac{\ln P_2 - \ln P_0}{\ln P_1 - \ln P_0} = \frac{\ln P_1 - \ln P_2}{\ln P_1 - \ln P_0} \rightarrow \gamma = \frac{\ln P_1 - \ln P_0}{\ln P_1 - \ln P_2} \quad (7)$$

Las presiones se miden con el manómetro, con la relación:  $P = \rho \cdot g \cdot H$ , donde  $H$  es la lectura del manómetro en U (ver figura 2), así pues:

$$P_1 = \rho \cdot g \cdot H_1 + P_0 = P_0 \left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot H_1}{P_0}\right), \text{ aplicando logaritmo: } \ln P_1 = \ln P_0 + \ln\left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot H_1}{P_0}\right) \quad (8)$$

$$P_2 = \rho \cdot g \cdot H_2 + P_0 = P_0 \left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot H_2}{P_0}\right), \text{ aplicando logaritmo: } \ln P_2 = \ln P_0 + \ln\left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot H_2}{P_0}\right) \quad (9)$$

$$(8) \text{ y } (9) \text{ en } (7) \text{ da: } \gamma = \frac{\ln\left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot H_1}{P_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot H_1}{P_0}\right) - \ln\left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot H_2}{P_0}\right)} \quad (10),$$

para simplificar más esta ecuación se realiza la aproximación mediante el desarrollando la serie:

$$\ln\left(1 + \frac{\rho \cdot g \cdot H}{P_0}\right) = \frac{\rho \cdot g \cdot H}{P_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho \cdot g \cdot H}{P_0}\right)^2 + \dots, \quad (11)$$

Recuérdese que  $P_0$  es aproximadamente 65000 [Pa] en la ciudad de La Paz, entonces al ser en la ecuación (11) los cocientes menores que uno y al estar los términos segundo y demás elevados a potencias se hacen demasiado pequeños por lo tanto despreciables. Consecuentemente la ecuación (10) quedaría:

$$\boxed{\gamma = \frac{H_1}{H_1 - H_2}} \quad (12)$$

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Siendo:

$\gamma$  la constante gamma encontrada experimentalmente con el método de Clement y Desormes,

$\gamma_{TEO}$  la constante gamma teórica

Hipótesis nula  $H_0$  :  $\gamma = \gamma_{TEO}$

Hipótesis alternativa  $H_1$  :  $\gamma \neq \gamma_{TEO}$  Bilateral o de dos colas

Al emplear la prueba  $t$  de Student, para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t \text{ calculado} < t \text{ de tablas}$ .

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la determinación de gamma por el método de Clement y Desormes no es válido o el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  (dos colas).

## 1.4 OBJETIVOS

- Encontrar la constante gamma del aire por el método de Clement y Desormes.
- Validar el valor encontrado con el teórico.

## 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Botellón de vidrio herméticamente cerrado y tres aperturas en su tapa.
- Manómetro en U.
- Mangueritas para conexiones.
- Regla de 0,30 [m]

### 1.5.2 PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL DEL MÉTODO DE CLEMENT Y DESORMES

1. Cerrar la apertura B e insuflar por la perilla de goma, aire al interior del botellón, mientras se observa el incremento de la columna de líquido manométrico hasta una posición similar al representado en la figura 4 (estado B). Debe tener cuidado de no elevar en exceso la presión para que no rebalse el líquido manométrico del tubo en U.
2. Cierre el ingreso de aire por la apertura A, por ejemplo doblando la manguerita de conexión al insuflador. Debe revisar que no hay escape de aire verificando que no baja el valor de  $H_1$ .
3. Medir el valor de  $H_1$  y registrar el valor
4. Abrir la apertura B para que escape el aire del botellón e inmediatamente  $H_1$  llegue a cero (primera oscilación, figura 4 (estado C))

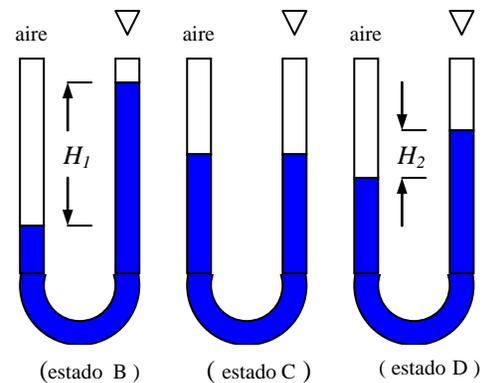


figura 4: manómetro en estados B, C y D

1. Mantener bien cerradas todas las aperturas o posibles puntos de infiltración y esperar que el manómetro llegue a la posición del estado D de la figura 4, y una vez se estabilice tomar la medida  $H_2$ .
6. Repetir unas diez veces el procedimiento para otros valores similares a  $H_1$ .

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 CÁLCULOS

- Determinar:  $\gamma = \bar{\gamma} \pm E\gamma$       GAMMA EXPERIMENTAL

Donde:

$$\bar{\gamma} = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i}{n}, \quad \gamma_i = \frac{(H_1)_i}{(H_1)_i - (H_2)_i}, \quad E\gamma = t_{\alpha/2, (n-1)} \frac{s_\gamma}{\sqrt{n_\gamma}}, \quad s_\gamma = \sqrt{\frac{\sum (\gamma_i - \bar{\gamma})^2}{n-1}}$$

### 2.2 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

$$t_{calc.} = \frac{|\bar{\gamma} - 1,4|}{s_\gamma / \sqrt{n}}, \quad \text{recuérdese que el } t_{tabla} \text{ se encuentra de la tabla de Student para } n-1 \text{ grados de libertad}$$

Para no rechazar la Hipótesis nula  $H_0$ , debe cumplirse:  $t_{calculado} < t_{tabla}$

## 2.2 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

1. Se emplean manómetros de columna de agua para medir presiones bajas como la que se consigue en el presente experimento y en aplicaciones de aire impulsado por ventiladores centrífugos o en tuberías de distribución domiciliaria de gas natural. Por ejemplo una pulgada de columna de agua, ¿Qué porcentaje de la presión atmosférica representa?. ¿De qué modo influirían burbujas en el interior del líquido manométrico?.
2. ¿Por qué el vapor de agua que está en el ambiente, no es considerado parte constituyente del aire?
3. Si la variable independiente  $H_1$  se mantendría constante para todas las medidas, las dispersiones de su medida y de  $H_2$  serían pequeñas y estos valores se podrían expresar como:  $H_1 = \overline{H}_1 \pm E_H$  y  $H_2 = \overline{H}_2 \pm E_H$  respectivamente, entonces  $E_\gamma$  tendría que calcularse con propagación. Deduzca la ecuación para encontrar el error de medida de gamma ( $E_\gamma$ ).
4. Indique ¿qué Ley de la Termodinámica predice la ocurrencia del proceso C-D del experimento?
5. El proceso de expansión B-C del experimento hace que el aire en el interior del botellón se enfríe, este principio se aplica en los evaporadores de los refrigeradores para “absorber” calor de los alimentos, ¿qué sucede en los procesos de compresión adiabática?, cite algunos ejemplos.
6. Indique ¿qué medio de propagación de calor permite al aire del interior del botellón ganar calor del exterior del botellón?, ¿cómo conseguiría experimentalmente que el proceso C-D sea más corto? (más rápido).
7. ¿No se estaría cometiendo error en el experimento debido a que al dejar escapar aire, ¿no se estarían perdiendo moles? y por ende la ecuación de estado ¿ya no tendría validez?
8. ¿Qué error sistemático se comete de emplear la ecuación (12) en vez de la (10) en la determinación de gamma?. Sugerencia: Calcular gamma promedio con la ecuación (10) para ver la diferencia.
9. Haciendo uso del gamma encontrado en el experimento, presiones registradas, calcule la temperatura  $T_C$  en función de  $T_0$ . ¿Qué beneficios se obtendrían en el experimento si se equipa al botellón con un termistor en su interior?
10. Cuando se incrementa la presión del aire, el vapor de agua presente en el aire tiende a condensarse, en cambio cuando la presión baja el agua evapora a menores temperaturas, este fenómeno es fácil de recordar para los que vivimos en altitudes. Comente ¿cómo influiría un manómetro de columna de agua en el presente experimento?. ¿Cómo influye el vapor de agua, que aunque en pequeñas proporciones siempre está presente en el aire?

## DETERMINACIÓN DE GAMMA DEL AIRE

ESTUDIANTE:

GRUPO:

FECHA EXPERIMENTO:

VoBo:

### Variables

Prueba N°										
variable independiente $H_1$										
variable dependiente $H_2$										

otras variables intervinientes:

$\rho$ (densidad del líquido manométrico):

$g$ :

$P_o$ :

$T_o$ :

## EQUIVALENTE ELÉCTRICO

### 1. PLANEACIÓN DEL EXPERIMENTO

#### 1.1 INTRODUCCIÓN:

En la figura 1 se muestra el experimento original empleado por Joule en el intervalo de 1843 a 1878, para demostrar que cada vez que una cantidad dada de energía mecánica se transformaba en calor se obtenía siempre la misma cantidad de éste, quedando establecida la equivalencia del calor y el trabajo como dos formas de energía. Aunque esto puede parecer bastante obvio hoy en día, en ese entonces, la disciplina que estudiaba el calor, estaba totalmente distanciada de aquella que estudiaba la física de Newton, entonces el mérito de este experimento radica en la fusión o integración de dos sistemas de conocimiento.

Debido a la dificultad en el aspecto constructivo y de operación en el empleo de una réplica del equipo original usado por Joule, en el presente experimento se comprobará, la equivalencia de energía calorífica con energía eléctrica.

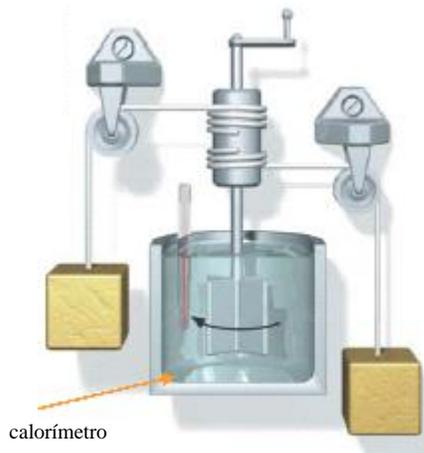


fig 1: experimento realizado por Joule

Para la determinación de la capacidad calorífica del calorímetro, se hará uso del método de las mezclas, y a fin de corregir las pérdidas de calor se empleará la Ley de enfriamiento de Newton.

#### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO:

Aunque el Sistema Internacional (SI), reconoce al *Joule* [J] como única unidad de la energía, es común todavía el uso de otras unidades como la [cal], el [Btu] entre otros para cuantificar la cantidad de calor.

Así pues:  $1[cal] = 4,186[J]$ . Al dividir la magnitud energía entre el tiempo se obtiene la potencia según:

$$\rightarrow P[W] = \frac{E[J]}{t[s]} \text{ del SI, para la determinación de la energía eléctrica.}$$

$$\rightarrow \dot{Q} \left[ \frac{cal}{s} \right] = \frac{Q[cal]}{t[s]}, \text{ empleada en calorimetría y determinación de energía calorífica.}$$



figura 2: Calorímetro (aislamiento-envase)

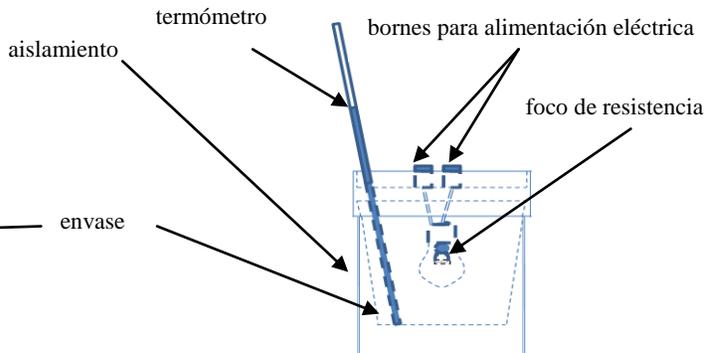


figura 3: Calorímetro completo representación esquemática

### ENERGÍA ELÉCTRICA “E”

La potencia disipada por una resistencia eléctrica  $R$  que es alimentada por una fuente de voltaje  $V$ , está dada por:

$$P = \frac{V^2}{R} \quad (1), \quad \text{ó} \quad E = \frac{V^2}{R} \cdot t_0 \quad (2), \quad \text{donde:}$$

$V$  : voltaje medido por un voltímetro en [V] (voltios)

$R$  : resistencia medida con un multímetro en [ $\Omega$ ] (ohmios)

$E$  : energía disipada en [J] por  $R$  en el tiempo  $t$ .

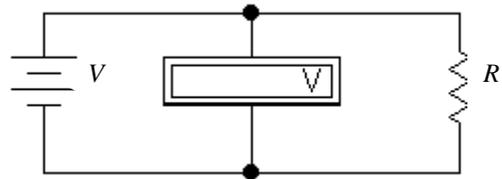


figura 4: circuito eléctrico con una resistencia

Una resistencia de calefactor convierte toda la potencia en calor, si se usara un foco en cambio, parte de ella se convierte en radiación del espectro visible.

### ENERGÍA CALORÍFICA “Q”

$$Q = Q_C + Q_A \quad (3), \quad \text{donde}$$

$Q$  es el calor disipado por la resistencia eléctrica,

$Q_C$  es el calor que gana el calorímetro en su conjunto y

$Q_A$  calor que gana el agua contenida en el calorímetro. Por calorimetría se tiene:

$$Q_C = C_C \cdot (T_f - T_i) \quad (4) \quad \text{y} \quad Q_A = m_A \cdot c_A \cdot (T_f - T_i) \quad (5), \quad \text{al reemplazar (4) y (5) en (3) se obtiene:}$$

$$Q = (C_C + m_A \cdot c_A) \cdot (T_f - T_i) \quad (6) \quad \text{donde:}$$

$C_C$  : capacidad calorífica del calorímetro (incluido el termómetro, la resistencia eléctrica o foco y el agitador)

$m_A$  : masa de agua a calentarse en el calorímetro

$c_A$  : calor específico del agua

$T_i$  : temperatura al inicio del experimento  $t = 0$

$T_f$  : temperatura final (al desconectar la resistencia eléctrica o foco).

### EL EQUIVALENTE ELÉCTRICO “J”

Si llamamos  $J$  al equivalente eléctrico, tenemos:  $J = \frac{E}{Q}$  (7), al reemplazar (2) y (6) en (7), queda:

$$J = \frac{V^2 \cdot t_0}{R \cdot (C_C + m_A \cdot c_A) \cdot (T_f - T_i)} \quad (8)$$

En la ecuación (8), el  $V$  se mide con voltímetro (como se ve en la figura 4), la  $R$  con multímetro,  $m_A$  indirectamente con una balanza, el  $c_A$  se puede adoptar de tablas,  $t_0$  el tiempo cronometrado para elevar la temperatura de  $T_i$  a  $T_f$  a registrarse con un termómetro u otro instrumento de medida de temperatura. Entonces falta la determinación del valor de  $C_C$ , y finalmente corregir el valor de  $T_f$  debido a las pérdidas de calor.

### DETERMINACIÓN DE $C_C$ .

Se empleará el **método de las mezclas** para determinar la capacidad calorífica “ $C_C$ ” del calorímetro en su conjunto. El mismo consiste en verter agua a temperatura  $T_2$  al calorímetro conteniendo también cierta cantidad de agua, pero a  $T_1$ , tal que  $T_2 > T_1$ . Consecuentemente:

- Calor ganado por el calorímetro y el agua contenida en él:

$$Q_1 = (C_C + m_1 \cdot c_A) \cdot (T_{eq} - T_1) \quad (9)$$

- Calor cedido por el agua a mayor temperatura

$$Q_2 = m_2 \cdot c_A \cdot (T_2 - T_{eq}) \quad (10)$$

La temperatura de equilibrio “ $T_{eq}$ ” se consigue luego que las dos porciones de agua se mezclan bien e intercambian calor hasta llegar al equilibrio térmico  $Q_1 = -Q_2$  (11)

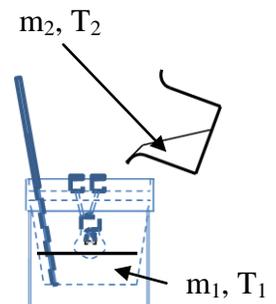


figura 5: mezcla de agua  $T_2 > T_1$

- $Q_1$  con signo positivo porque ese sistema gana calor.
- $Q_2$  con signo negativo porque ese sistema pierde calor.

Al reemplazar (9) y (10) en (11) queda:

$$C_c = \frac{m_2 \cdot c_A \cdot (T_2 - T_{eq})}{(T_{eq} - T_1)} - m_1 \cdot c_A \quad (12)$$

### LAS PÉRDIDAS DE CALOR

Aunque el calorímetro a emplearse en laboratorio está aislado térmicamente, el mismo presentará pérdida de calor debido a que su temperatura es mayor que la del ambiente “ $T_0$ ”. Este proceso involucra radiación, conducción y convección. La estimación de este flujo calorífico es bastante difícil por el número de variables que intervienen y sobre todo, porque la temperatura del calorímetro es variable en el proceso que se calienta con la resistencia eléctrica o foco.

La figura 6 muestra la evolución de los procesos:

- Ideal: Sin pérdidas de calor
- Experimental: Con pérdidas de calor

Entonces la temperatura máxima obtenida en el experimento “ $T_{max}$ ”, no es la misma que la que se obtendría idealmente “ $T_f$ ”, que es el valor que se emplea en los cálculos.

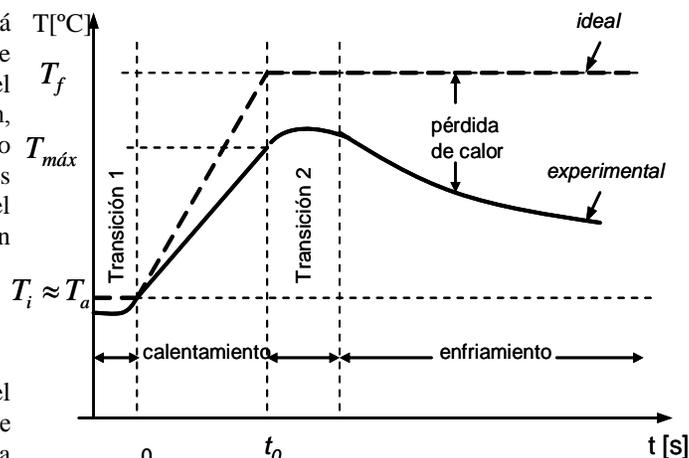


figura 6: curvas de calentamiento y enfriamiento

### DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS DEL EXPERIMENTO (figura 6)

1. Transición 1: Al enchufar la resistencia eléctrica o foco a la fuente (cuyo voltaje máximo está especificado por el fabricante), la temperatura de ésta no subirá inmediatamente, le tomará algún tiempo antes de que ésta sea capaz de generar calor. Este proceso NO será considerado en la toma de datos, por ello, el cero del cronómetro se sincronizará con el instante en que la temperatura empieza realmente a incrementarse. Para la condición ideal, se supone que el cero coincidirá exactamente con el instante de enchufado.
2. Calentamiento: Se emplea energía eléctrica con el sistema: fuente de voltaje – resistencia eléctrica, para convertir la misma en su EQUIVALENTE calor, que se aprovecha para elevar la temperatura del agua contenida en el calorímetro. Si el calorímetro fuera perfectamente aislado, se seguiría la trayectoria ideal, mas si se presentan pérdidas de calor, entonces la trayectoria será la experimental, como se muestra en la figura 6.
3. Transición 2: Cuando se desconecta la *fem* o fuente de poder; la resistencia se mantendrá por algún tiempo a una mayor temperatura que la del agua debido a su masa y calor específico, más conocida como masa térmica, por lo tanto seguirá brindando calor al agua subiendo algo más su temperatura. En condiciones ideales no se presenta esta etapa, porque se supone que al apagar la fuente de voltaje, la resistencia dejará instantáneamente de seguir brindando calor. NO se toman datos en esta etapa de transición.
4. Enfriamiento: Para una condición ideal, en que el calorímetro está perfectamente aislado, la temperatura final no se modificará en el tiempo. Sin embargo, experimentalmente es más probable encontrar que la temperatura disminuya debido a que el ambiente está a menor temperatura que el calorímetro. El análisis de este proceso es vital para conocer en que medida el calorímetro está adecuadamente aislado.

NOTA: En el presente experimento es muy ilustrativo apreciar el efecto de la masa térmica, en este caso de la resistencia eléctrica, pues al ser ésta grande especialmente por su masa, tardará en calentarse una vez que ha sido enchufada a la fuente para proporcionar calor al agua del calorímetro y así elevar su temperatura: transición 1, así como también tardará en enfriarse una vez que ésta ha sido desconectada de la fuente: transición 2. Si la resistencia fuera de hilo delgado (poca masa térmica), los procesos de transición 1 y 2 sería prácticamente despreciables, pero en contraposición estas resistencias son de corta duración y muy sensibles a sobrecorrientes.

### LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON (Para la determinación de $T_f$ )

Como se indicó anteriormente, es fundamental evaluar el proceso de enfriamiento para así conocer en que medida el calorímetro ha sido adecuadamente aislado. Para el efecto se hará uso de la Ley de enfriamiento de Newton.

La Ley de enfriamiento de Newton dicta, que la velocidad de pérdida de temperatura de un cuerpo a “ $T$ ” en un entorno a “ $T_a$ ” es proporcional a la diferencia de estas temperaturas. Es decir:  $\frac{dT}{dt} = -K(T - T_a)$ , la validez de esta ecuación se limita a rangos en los que la diferencia entre  $T$  y  $T_a$  no es muy grande como aproximadamente sucederá en el experimento. Recuérdese que las pérdidas por radiación son proporcionales a:  $T^4 - T_a^4$  y que no eran de conocimiento de Newton.  $K$  depende de las características del sistema para propagar el calor.

Integrando la ecuación de Newton tenemos:  $\int_{T_f}^T \frac{d(T - T_a)}{T - T_a} = -K \int_0^t dt \rightarrow \ln \frac{T - T_a}{T_f - T_a} = -K \cdot t$ , es decir:

$$T = T_a + (T_f - T_a) \cdot e^{-K \cdot t} \quad (13) \text{ ecuación que representa el proceso de enfriamiento } \textit{experimental} \text{ considerando}$$

pérdidas. En cambio la ecuación que representa el proceso de calentamiento *experimental* considerando pérdidas está

$$\text{dada por: } T = T_i + b \cdot t \quad (14). \text{ Donde } b \text{ es la pendiente: } b = \frac{(T_{\max} - T_i)}{t_0} \quad (15)$$

La ecuación (13) es exponencial y la (14) representa una recta como se aprecia en la figura 6.

Generalmente:  $T_i = T_a$ , luego la ecuación (14) queda:  $T - T_a = b \cdot t$  (16), si reemplazamos (16) en (13) da:

$$b \cdot t = (T_f - T_a) \cdot e^{-K \cdot t} \rightarrow T_f = T_a + b \cdot t_0 \cdot e^{K \cdot t_0} \quad (17) \text{ temperatura final corregida}$$

$b$  se encuentra del proceso de calentamiento y  $K$  del proceso de enfriamiento en el experimento,  $t$  para  $T_f$  es  $t_0$ .

Las ecuaciones (12) y (17) correspondientes a los experimentos por el método de las mezclas y del proceso de enfriamiento con la Ley de Newton respectivamente, se emplean en la ecuación (8) para hallar “ $J$ ”.

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

En la presente práctica, se realizará solo un experimento: un solo proceso de calentamiento y un solo proceso de enfriamiento, y el equivalente eléctrico se determinará a partir de la ecuación 8 que tiene valores únicos. Es decir, que no se cuenta con “ $n$ ” medidas para aplicación de métodos estadísticos, consecuentemente no se aplicará formulación de hipótesis estadística.

DE LINEALIDAD: Sin embargo debe constatarse que el coeficiente de correlación  $r$  debe ser próximo a 1

### 1.4 OBJETIVOS

- Encontrar el equivalente eléctrico  $J$ .
- Empleo del método de mezclas para determinar la capacidad calorífica del calorímetro.
- Empleo de la Ley de enfriamiento de Newton para determinar la temperatura final  $T_f$  de la condición ideal.
- Observación de los procesos de enfriamiento y calentamiento.

## 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Calorímetro con aislamiento térmico.  
Agitador.  
Resistencia eléctrica o foco.  
Termómetro u otro instrumento de medida de temperatura.  
Agua
- Fuente de alimentación eléctrica para la resistencia.
- Multímetro
- Cronómetro.
- Conjunto hornilla – recipiente (calentamiento de agua para método de las mezclas).
- Balanza.
- Tinta negra para echar al agua en caso de que se emplee un foco como fuente de calentamiento. Así se evita pérdida de calor por radiación, por la luz que sale al exterior del calorímetro.

### 1.5.2 PROCEDIMIENTO DEL MÉTODO DE LAS MEZCLAS (Determinación de $C_C$ )

1. Pesar el calorímetro aun sin agua pero incluidos la resistencia, el agitador y el termómetro.
2. Verter agua hasta aproximadamente la mitad de la capacidad del calorímetro.
3. Pesar el calorímetro en esta condición (con el agua agregada), para obtener indirectamente  $m_1$ .
4. Esperar un momento para asegurar que el sistema está en equilibrio térmico (a una sola temperatura).
5. Medir la temperatura de equilibrio térmico inicial  $T_1$ .
6. Calentar agua en el conjunto hornilla – recipiente a una temperatura poco inferior a la temperatura de ebullición.
7. Medir la temperatura de la misma  $T_2$  y verter al calorímetro hasta casi llenarlo.
8. Usar el agitador para asegurar buena mezcla que favorezca el equilibrio térmico.
9. Medir permanentemente la temperatura hasta encontrar que ésta se estabiliza y registrar la  $T_{eq}$ .
10. Pesar nuevamente el calorímetro con la mezcla de agua, de la resta de este valor con el obtenido en el paso 3, se obtiene  $m_2$ .

### 1.5.3 PROCESO DE CALENTAMIENTO (Determinación de $J$ ).

1. Verter agua a temperatura ambiente en el calorímetro hasta casi llenarlo y acomode adecuadamente los accesorios en su interior (resistencia eléctrica, agitador y termómetro).
2. Pesar el sistema (calorímetro con agua) para calcular  $m_A$ .
3. Medir con el multímetro el valor de la resistencia  $R_I$
4. Enchufar la fuente de alimentación y probar con un voltímetro la salida de voltaje y su regulación, luego de familiarizarse con este equipo, consultar al docente el voltaje apropiado a usarse o, revisar las especificaciones que da el fabricante del calorímetro.
5. Apagar momentáneamente el equipo.
6. Conectar la resistencia a la fuente de alimentación.
7. Conectar el voltímetro en paralelo a la resistencia (figura 4), solicitar apoyo del docente.
8. Verificar durante un lapso de tiempo que la temperatura se ha estabilizado en  $T_i$ .
9. Encender el equipo para suministrar energía eléctrica a la resistencia  $R$  y simultáneamente iniciar el cronómetro en  $t = 0$ .
10. Medir la temperatura cada 30 segundos durante el tiempo que tome calentar el agua a aproximadamente  $55^\circ\text{C}$ .
11. Registrar el voltaje  $V$  indicado por el voltímetro y verificar si éste se mantiene constante en el proceso de calentamiento.
12. Cortar el suministro de energía eléctrica cuando está alrededor de los  $55^\circ\text{C}$  y registre este valor como  $T_{max}$ , registrar el tiempo acumulado como  $t_0$ , y continuar midiendo la temperatura cada 60 segundos de modo de obtener datos para la curva de enfriamiento.

13. Volver a medir el valor de la resistencia  $R_2$ , pues  $R = (R_1 + R_2) / 2$ .

NOTA: Recuerde que en los procesos de transición (transitorios) no deben tomarse lecturas de temperatura ni tiempo.

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 CÁLCULOS

1. Aplique la ecuación (12) para la determinación de  $C_C$ .
2. Realice la gráfica de  $T$  vs  $t$  correspondientes al “proceso de calentamiento”.
3. Regresión lineal en la forma:  $y = a + b \cdot x$  ó  $T = T_i + b \cdot t$ , con  $n$  medidas, de modo que:

$$4. \quad T = \underbrace{\frac{\sum t_i^2 \sum T_i - \sum t_i \sum T_i t_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}}_{T_i \text{ (Temp. inicial)}} + \underbrace{\frac{n \sum t_i T_i - \sum t_i \sum T_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}}_b \times t, \quad (18)$$

$$5. \quad r = \frac{n \sum T_i t_i - \sum t_i \sum T_i}{\sqrt{[n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2] \cdot [n \sum T_i^2 - (\sum T_i)^2]}}, \quad (19) \text{ coeficiente de correlación}$$

6. Para hallar “ $K$ ” Graficar la “curva de enfriamiento” en cualquiera de las siguientes formas:
  - a. Escala normal: La curva tendrá la forma:  $T = T_{\max} e^{-Kt}$ ,  $K$  se encuentra con regresión exponencial
  - b. Papel SemiLog (Logarítmica en las ordenadas): Obtendrá puntos que se ajustan a una línea, medir la pendiente, ésta será  $-K$ .
  - c. Linealizando: Graficar  $\ln T = \ln T_{\max} - Kt$ , queda en la forma:  $y = a' - b' \cdot x$  entonces aplicar regresión lineal y la pendiente  $K = b'$  (método recomendado). Para evitar logaritmos de valores negativos, debe trabajarse con escalas de medida de temperatura absoluta
7. Determinación de la temperatura final corregida  $T_f$ .
8. Haciendo uso de la ecuación (17):  $T_f = T_a + b \cdot t_0 \cdot e^{Kt_0}$ , donde:
  - $T_a$ : es la temperatura ambiente o de inicio
  - $b$ : es la pendiente de la curva de calentamiento calculada en el paso 4.
  - $t_0$ : tiempo que dura el proceso de calentamiento con la resistencia conectada a la alimentación
  - $K$ : Constante hallada en el paso 6.

Si realizó adecuadamente los cálculos, obtendrá que  $T_f \geq T_{\max}$ , si el calorímetro no presenta pérdidas, se puede comprobar que:  $T_f = T_{\max}$

$$9. \text{ Determinación del equivalente con la ecuación (8): } J = \frac{V^2 \cdot t_0}{R \cdot (C_C + m_A \cdot c_A) \cdot (T_f - T_i)}$$

### 2.2 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

DE LINEALIDAD:  $r$  debe ser próximo a 1.

## 2.3 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

- 1 Con los datos que obtuvo en el experimento, ¿se cumple  $T_f \geq T_{máx}$ ?; ¿Con cuál de las dos temperaturas, se obtiene un valor de J más próximo al teórico? Comente la relación.
- 2 Si se empleara un foco en vez de una resistencia, se recomienda mezclar el agua con tinta negra y usar un recipiente de color blanco, ¿A qué se debe ello?
- 3 El método empleado en este experimento podría servir para encontrar el rendimiento de un foco (relación de energía eléctrica convertida en luz y no en calor), ¿qué cálculos podría realizar? Por qué cree que la Ley de enfriamiento de Newton, solo tiene validez para diferencias de temperatura pequeñas?
- 4 La Ley de enfriamiento de Newton se emplea en la ciencia forense para determinar la hora de la muerte de un cadáver que todavía está en proceso de enfriamiento, explique ¿qué mediciones debe tomar para ello?
- 5 Explique, ¿en función de qué variables se determina el voltaje de alimentación para la resistencia?
- 6 La calidad de regulación de una fuente de alimentación de energía eléctrica se evalúa de acuerdo a su capacidad de mantener la diferencia de potencial entre sus terminales en [V] constante ante variaciones de la carga. Comente estas características de la fuente usada en laboratorio.
- 7 Explique en qué medida influye la magnitud del calor específico y masa de la resistencia eléctrica a emplearse en el experimento?
- 8 Calcule en qué tiempo, la temperatura del calorímetro se aproximará a la del ambiente suponiendo que esta última se mantiene constante. ¿Está el calorímetro bien aislado térmicamente?
- 9 Será el tiempo de respuesta de un termómetro de mercurio adecuado para realizar este experimento?. Si no se dispondría de instrumentos rápidos, ¿convendría aplicar bajo voltaje a la resistencia para hacer más lento al proceso?-
- 10 ¿Por qué se debe calcular la capacidad calorífica del calorímetro con todos sus accesorios?. Sería recomendable retirar la resistencia del calorímetro en  $t_0$  (final del proceso de calentamiento) para evitar que ésta siga calentando al agua?

## EQUIVALENTE ELÉCTRICO

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

### Parámetros o constantes

medida directa

$T_a$  (temperatura ambiente) :  
 $W_C$  (peso del calorímetro) :

asumidos

$c_A$  (calor específico del agua) :  
 $g$  (constante de gravedad) :

medida indirecta

$$m_C = W_C / g :$$

### CÁLCULO DE $C_C$ POR EL MÉTODO DE LAS MEZCLAS

medida directa

$W_{1C}$  (peso del calorímetro con agua) :  
 $T_1$  (temperatura del calorímetro con agua) :  
 $T_2$  (temperatura del agua  $m_2$ )  
 $W_{2C}$  (peso del calorímetro más mezclas de agua) :  
 $T_{eq}$  (temperatura de equilibrio) :

medida indirecta

$$m_1 = ( W_{1C} / g ) - m_C :$$

$$m_2 = ( W_{2C} / g ) - m_1 - m_C :$$

### PROCESO DE CALENTAMIENTO

medida directa

$R_1$  (resistencia antes de calentar) :  
 $W_{AC}$  (peso del calorímetro más agua  $m_A$ ) :  
 $V$  (voltaje aplicado a la resistencia) :  
 $T_{max}$  [ $^{\circ}K$ ] (máxima temperatura alcanzada) :  
 $t_0$  (tiempo de calentamiento) :  
 $R_2$  (resistencia al terminar calentamiento) :

$$m_A = ( W_{AC} / g ) - m_C :$$

#### Variables

Prueba N°															
variable independiente $t$															
variable dependiente $T$ [ $^{\circ}K$ ]															

### PROCESO DE ENFRIAMIENTO

Prueba N°															
variable independiente $t$															
variable dependiente $T$ [ $^{\circ}K$ ]															

## CLASE DE INSTRUMENTACIÓN

### 1. OBJETIVO

Familiarizar al estudiante con los instrumentos de electricidad básica disponibles en laboratorio, además de ello se pretende proporcionar al estudiante capacidad para interpretar diagramas eléctricos y realizar instalaciones en un instrumental específico, al conciliar diagrama con circuito ejercitarán sus aptitudes para inducir y deducir y sobretodo, integrar teoría con práctica.

### 2. CONCEPTOS BÁSICOS

El flujo de carga eléctrica constituida principalmente de electrones, es lo que se conoce como corriente eléctrica o intensidad “ $I$ ” y su unidad de medida es el Amperio [A]. La causa para tener intensidad de corriente es, la presencia de una diferencia de potencial eléctrico o voltaje “ $V$ ” con unidad de medida Voltio [V]. La magnitud de la intensidad “ $I$ ” no depende sólo del voltaje “ $V$ ”, sino también de las características resistivas del material y su geometría “ $R$ ” cuya unidad de medida es el Ohmio [ $\Omega$ ].

#### 2.1 VOLTAJE:

En función al tipo de aplicación, las fuentes de voltaje pueden ser:

- Continuas: Su intensidad y polaridad se mantiene constante como en las pilas y baterías.
- Alterna: Su intensidad y polaridad varían de manera senoidal como la que se distribuye a nuestros domicilios.

La figura 1 muestra la representación de los dos tipos de voltaje. Este aspecto es importante recordar pues, el instrumento de medida a seleccionar dependerá de si el circuito es de corriente alterna o continua.

Símbolo de una Fuente  $V_{CC}$



Símbolo de una Fuente  $V_{AC}$

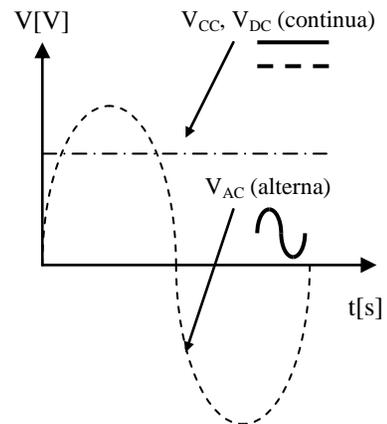



figura 1: representación del voltaje en el tiempo

Las fuentes de voltaje a emplearse en laboratorio son en realidad instrumentos que transforman los 220  $V_{AC}$  a voltajes menores regulables entre 0 y 24 [V] y rectificadas a voltaje de tipo continuo  $V_{CC}$ .

Además de una manija de regulación de voltaje, también cuenta con un limitador de corriente regulable. Éste funciona como un disyuntor o fusible electromagnético que corta el suministro de voltaje indicando “overload” cuando el nivel de corriente excede el valor ajustado a fin de proteger a los componentes del circuito.



figura 2:  $V_{CC}$  regulable

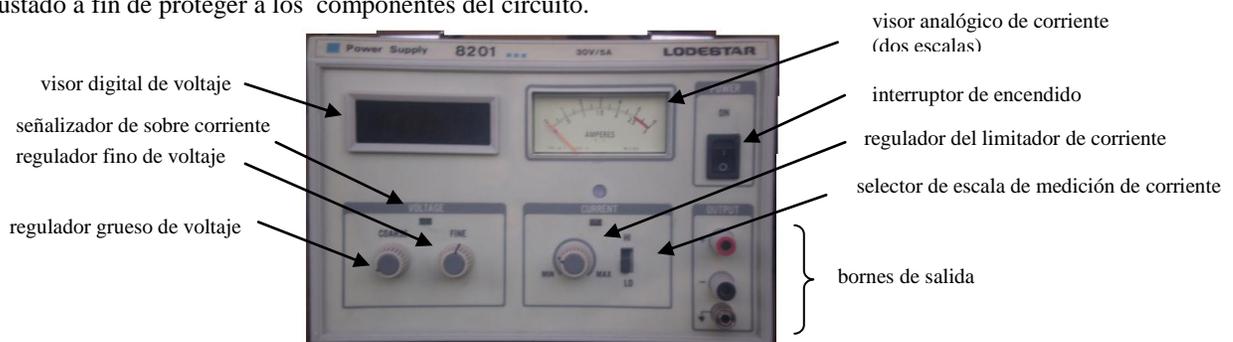


figura 3: fuente de voltaje  $V_{CC}$  del laboratorio

Recuerde que cuando se enciende el “overload” es porque la corriente está en nivel más alto que el ajustado con el regulador del limitador de corriente. Por precaución revise las conexiones del circuito o consulte al docente.

EL VOLTÍMETRO: El instrumento de medida para determinar voltajes, se conoce como voltímetro. Sin embargo los multímetros (tester) incluyen entre sus funciones también voltímetros. Los pasos a seguir son:

1. Seleccionar el voltímetro de acuerdo al tipo de voltaje a medir ( $V_{CC}$  o  $V_{AC}$ ), luego encenderlo.
2. Identificar los bornes correspondientes al voltímetro (+) y (-) en los de corriente continua  $V_{CC}$ .
3. Seleccionar el rango apropiado de lectura (escoger el mayor posible).
4. Conectar los cables, el (+) en el punto de mayor potencial, el (-) en el de menor potencial, esta precaución permite que el indicador dé valor positivo.
5. Mantenga sujetas las conexiones y lea el indicador (el instrumento no se quema porque tiene una resistencia interna muy grande)

## 2.2 RESISTENCIA:

Desde el punto de vista de la resistividad, podemos encontrar materiales conductores (no presentan ninguna oposición al paso de la corriente eléctrica como la plata, y el cobre), aislantes o dieléctricos (no permiten el flujo de corriente como los cristales), y resistivos (que presentan cierta resistencia). Dentro de este último grupo se sitúan las resistencias. Es por esto que se fabrican un tipo de componentes llamados resistores cuyo único objeto es proporcionar en un pequeño tamaño una determinada resistencia, especificada por el fabricante. Las resistencias son componentes eléctricos pasivos en los que la tensión instantánea aplicada es proporcional a la intensidad de corriente que circula por ellos. Su unidad de medida es el ohmio ( $\Omega$ ).

Se pueden dividir en tres grupos:

1. Resistencias lineales fijas: su valor de resistencia es constante y está predeterminada por el fabricante.
2. Resistencias variables: su valor de resistencia puede variar dentro de unos límites.
3. Resistencias no lineales: su valor de resistencia varía de forma no lineal dependiendo de distintas magnitudes físicas (temperatura, luminosidad, etc. como los termistores que tienen un elevado coeficiente de temperatura).

### RESISTENCIAS LINEALES FIJAS

Estos componentes de dos terminales presentan un valor nominal de resistencia constante (determinado por el fabricante), y un comportamiento lineal, se representa por uno de estos símbolos:



Estas son las especificaciones técnicas más importantes que podemos encontrar en las hojas de características que nos suministra el fabricante:

- Resistencia nominal ( $R_n$ ): es el valor óhmico que se espera que tenga el componente.
- Tolerancia: es el margen de valores que rodean a la resistencia nominal y en el que se encuentra el valor real de la resistencia. Se expresa en tanto por ciento sobre el valor nominal.
- Potencia nominal ( $P_n$ ): es la potencia (en Watts) que la resistencia puede disipar sin deteriorarse a la temperatura nominal de funcionamiento.
- Coeficiente de temperatura ( $\alpha$ ): es la variación del valor de la resistencia con la temperatura.

### Clasificación De Resistencias Lineales

La clasificación de estas resistencias se puede hacer en base a los materiales utilizados para su construcción, básicamente mezclas de carbón o grafitos y materiales o aleaciones metálicas. También se pueden distinguir distintos tipos atendiendo a características constructivas y geométricas. Una clasificación sería la siguiente:

DE CARBÓN: Aglomeradas y de capa.

METÁLICAS: De capa, de película y bobinadas.

### RESISTENCIAS DE CARBÓN

Es el tipo más utilizado y el material base en su construcción es el carbón o grafito (figura 4). Son de pequeño tamaño y baja disipación de potencia. Según el proceso de fabricación y su constitución interna, podemos distinguir:



figura 4: resistencia de carbón de 0,25 a 4 W

Resistencias aglomeradas: También se conocen con el nombre de "composición", debido a su constitución: una mezcla de carbón, materia aislante, y resina aglomerante. Variando el porcentaje de estos componentes se obtienen los distintos valores de resistencias. Entre sus características se puede destacar:

- Robustez mecánica y eléctrica (sobrecarga).
- Bajos coeficientes de tensión y temperatura.

Resistencias de capa de carbón: En este tipo de resistencias, la fabricación está basada en el depósito de la composición resistiva sobre un cuerpo tubular formado por materiales vítreos cerámicos. Como características más importantes:

- Elevado coeficiente de temperatura.
- Soportan mal las sobrecargas.
- Mayor precisión.

RESISTENCIAS METÁLICAS: Estas resistencias están constituidas por metales, óxidos y aleaciones metálicas como material base. Según el proceso de fabricación y aplicación a la que se destinan podemos distinguir:

Resistencias de capa metálica: Están constituidas por un soporte que puede ser de pirex, vidrio, cuarzo o porcelana, sobre el que se depositan capas por reducción química para el caso de óxidos metálicos o por vaporización al vacío para metales o aleaciones metálicas. Los óxidos más utilizados son de estaño, antimonio e indio, como metales y aleaciones de oro, platino, indio y paladio dentro del grupo de metales preciosos. Estos componentes tienen una gran estabilidad y precisión y un bajo nivel de ruido por lo que suelen ser utilizadas en aplicaciones exigentes. Entre sus características más importantes:

- Rangos reducidos de potencia y tensión.
- Estrechas tolerancias y elevada estabilidad.
- Bajo coeficiente de temperatura y altas temperaturas de funcionamiento.

Resistencias de película metálica: La diferencia fundamental con las anteriores está en las técnicas de fabricación utilizadas, mediante las cuales se han conseguido integrar redes de resistencias. Los materiales base usados en su fabricación y los cuerpos soporte son los característicos de las resistencias metálicas, a excepción de los óxidos metálicos. Dentro de este tipo también podemos diferenciar dos tipos: de película delgada y de película gruesa, diferenciándose en las características constructivas.

Las principales ventajas de estas resistencias radica en su reducido tamaño, y sobretodo en la disponibilidad de redes de resistencias como componente integrado. A pesar de su reducido margen de potencia, inferior a 1/2 W, las ventajas respecto a las resistencias discretas se pueden resumir en:

- Costo y espacio menores.
- Tolerancias más ajustadas.

### Resistencias Metálicas Bobinadas

En este tipo (figura 5), se emplean como soportes núcleos cerámicos y vítreos, y como materiales resistivos metales o aleaciones en forma de hilos o cintas de una determinada resistividad, que son bobinados sobre los núcleos soporte. Los bobinados de los equipos eléctricos y electrónicos son de este tipo.

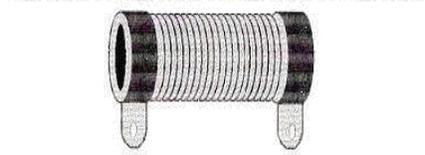


figura 5: resistencia metálica bobinada

Generalmente se suele hacer una subdivisión de este tipo en bobinadas de potencia y bobinadas de precisión, según la aplicación a la que se destinan. Como características generales se pueden destacar las siguientes:

- Gran disipación de potencias y elevadas temperaturas de trabajo.
- Elevada precisión, variación con la temperatura.
- Considerables efectos inductivos.
- Construcción robusta.



figura 6: resistencia bobinada cementada de 2 a 15 W

Las resistencias bobinadas se pueden incluir en algunos de los modelos comerciales siguientes: hilo descubierto, esmaltadas, vitrificadas o cementadas y aisladas. Las resistencias cementadas se caracterizan por un alto grado de linealidad.

### RESISTENCIAS VARIABLES

Estas resistencias pueden variar su valor óhmico dentro de unos límites. Para ello se les ha añadido un tercer terminal unido a un contacto móvil que puede desplazarse sobre el elemento resistivo proporcionando variaciones en el valor de la resistencia. Este tercer terminal puede tener un desplazamiento angular (giratorio) o longitudinal (deslizante).

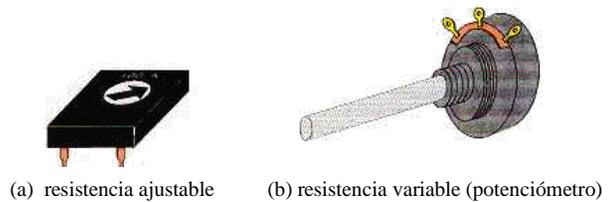


figura 7: resistencias variables

Según su función en el circuito, estas resistencias se denominan:

- Potenciómetros: se aplican en circuitos donde la variación de resistencia la efectúa el usuario desde el exterior (controles de audio, video, etc.).
- “Trimmers”, o resistencias ajustables: se diferencian de las anteriores en que su ajuste es definitivo en el circuito donde van aplicadas. Su acceso está limitado al personal técnico (controles de ganancia, polarización, etc.).
- Reóstatos: son resistencias variables en las que se suele eliminar uno de sus terminales extremos. Aunque su principal característica es que están diseñados para soportar grandes corrientes, el reóstato del tablero que se emplea en laboratorio soporta hasta 5 Amperios.

### RESISTENCIAS NO LINEALES

La resistencia se mantendrá constante siempre y cuando no exista variación de la temperatura, sin embargo en la práctica, ello es imposible. Todas las resistencias dependen en menor o mayor grado de la temperatura.

La variación de la temperatura produce una variación en la resistencia. En la mayoría de los metales aumenta su resistencia al aumentar la temperatura ( $\alpha > 0$ ), por el contrario, en otros elementos, como el carbono o el germanio la resistencia disminuye ( $\alpha < 0$ ). En algunos materiales la resistencia llega a desaparecer cuando la temperatura baja lo suficiente. En este caso se habla de superconductores.

Experimentalmente se comprueba que para temperaturas no muy elevadas, la resistencia a un determinado valor de  $T(R_T)$ , viene dada por la expresión:

$$R_T = R_o \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (4)$$

donde:

$R_o$  = Resistencia de referencia a 20°C.

$\alpha$  = Coeficiente Olveriano de temperatura.

$\Delta T$  = Diferencia de temperatura respecto a los 20°C (T-20).

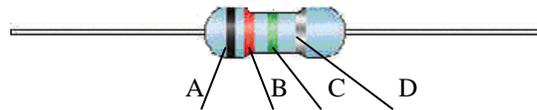
### CÓDIGO DE COLORES

Las resistencias para aplicaciones de circuitos se ven como pequeños cilindros con franjas de color, conocidas como el código de colores. Con ellas indica el fabricante el valor en ohmios y su tolerancia.

Debe indicarse que el comportamiento de las resistencias oponiéndose a la corriente eléctrica es el mismo si se usara  $V_{CC}$  o  $V_{AC}$ , tampoco tiene importancia su polaridad o sentido en el que circula la corriente.

COLOR	1ra y 2da FRANJA	3ra FRANJA	4ta FRANJA
Negro	0	0	
Marrón (café)	1	1	
Rojo	2	2	2 %
Naranja	3	3	3 %
Amarillo	4	4	4 %
Verde	5	5	
Azul	6	6	
Violeta	7		1 %
Gris (plomo)	8		
Blanco	9		
Dorado		-1	5 %
Plateado		-2	10 %
Sin color			20 %

A,B,C,D son franjas cuyo valor depende del color



A B C D

$$\Omega = AB \times 10^C \pm D \quad (1)$$



Símbolo eléctrico

figura 8: resistencia eléctrica

Ejemplo 1: 1ra franja negra (A=0), 2da franja roja (B=2), 3ra franja verde (C=5), 4ta franja plateada (D=10%). Reemplazando en (1) da:  $02 \times 10^5 \pm 10 \% = 200\,000 \pm 20\,000 \text{ } [\Omega]$  ó en el rango  $[180\,000 - 220\,000] \text{ } [\Omega]$   
 Ejemplo 2: 1ra franja naranja (A=3), 2da franja gris (B=8), 3ra franja café (C=1), 4ta franja dorada (D=5%). Reemplazando en (1) da:  $380 \pm 19 \text{ } [\Omega]$

El multímetro tiene entre sus funciones seleccionables, la lectura de resistencia en ohmios  $[\Omega]$ , kiloohmios  $[K\Omega]$ , megaohmios  $[M\Omega]$  a ajustarse en su manija reguladora, para su empleo no se requiere especificar si el circuito es de corriente alterna o continua ni la polaridad. Mas bien, su lectura debe realizarse estando el circuito sin alimentación de voltaje y luego de haberse desconectado del circuito para evitar influencia de elementos ligados a éste. Las dos terminales del multímetro deben conectarse en los dos extremos entre los cuales se desea medir la resistencia.

### RESISTENCIA VARIABLE O REÓSTATO

La resistencia de un elemento depende del material que está hecho, es decir su propiedad resistividad " $\rho$ " y de sus características geométricas, su sección " $A$ " y longitud " $L$ ". De manera que:  $R = \frac{\rho \cdot L}{A}$ . Luego puede concebirse un elemento cuya resistencia sea regulable variando su longitud. Véanse figura 7 (b) y 9:

- Terminales 1-2 tienen una resistencia de valor fijo
- Terminales 1-3 tienen una resistencia variable
- Terminales 2-3 tienen una resistencia variable

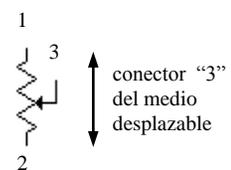


figura 9: esquema de un reóstato

En laboratorio se emplearan tableros de resistencia, similares a los mostrados en la figura 10. Inspeccione cuidadosamente la parte trasera de dicho tablero.

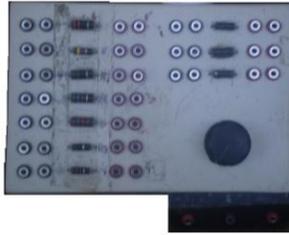


Figura 10: vista física del tablero de laboratorio

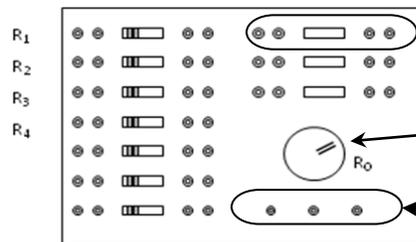


figura 11: vista esquemática del tablero

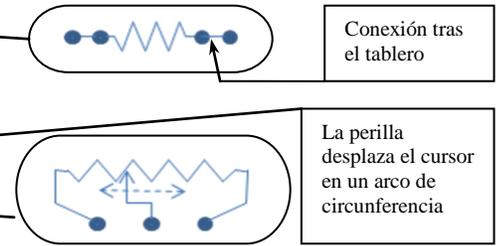


figura 12: representación eléctrica

## MEDIDA DE LA RESISTENCIA

El ohmiómetro es un dispositivo de medición muy importante, ya que ayuda a localizar circuitos abiertos o cortocircuitos midiendo la “resistencia” o la “continuidad” del componente o circuito bajo prueba. Su funcionamiento se basa en la medición indirecta de corriente que pasa por una resistencia, para ello el multímetro debe proporcionar una pequeña corriente, entonces, si su batería está gastada los valores leídos pueden estar errados.

### 2.3 INTENSIDAD:

La intensidad “ $I$ ” representa el flujo de carga “ $q$ ” por unidad de tiempo  $I = \frac{dq}{dt}$ , misma que puede ser alterna o continua, dependiendo del tipo de voltaje. El conocimiento de su intensidad es importante para dimensionar el diámetro de los conductores, mientras más corriente, más grueso debe ser el cable conductor, consecuentemente los elementos de protección como los fusibles y disyuntores se especifican también en función al valor de la corriente eléctrica medida en amperios.

**EL AMPERÍMETRO:** El instrumento de medida para determinar intensidades, se conoce como amperímetro. Sin embargo los multímetros (tester) incluyen entre sus funciones también amperímetros. Los pasos a seguir son:

1. Seleccionar el amperímetro de acuerdo al tipo de voltaje aplicado  $V_{CC}$  o  $V_{AC}$ , luego encenderlo.
2. Identificar los bornes correspondientes al amperímetro (+) y (-) en los de corriente continua  $V_{CC}$ .
3. Seleccionar el rango apropiado de lectura (escoger el mayor posible).
4. Desconectar en el circuito el cable en el cuál se desea medir la intensidad.
5. Conectar los cables, el (+) en el punto de mayor potencial, el (-) en el de menor potencial, esta precaución permite que el indicador dé valor positivo.
6. Mantenga sujetas las conexiones y lea el indicador (es importante recordar que el amperímetro tiene una resistencia muy pequeña, entonces ésta se quemaría si no conecta en serie a una resistencia que limite el valor de la corriente).

**MULTÍMETROS:** Un multímetro, a veces también denominado polímetro o tester del inglés, es un instrumento electrónico de medida que combina varias funciones en una sola unidad. Las más comunes son las de voltímetro, amperímetro y ohmiómetro.

Otras funciones que también incluye un multímetro son:

- Un comprobador de continuidad, que emite un sonido cuando el circuito bajo prueba no está interrumpido o la resistencia no supera un cierto nivel. (También puede mostrar en la pantalla 00.0, dependiendo el tipo y modelo).
- Presentación de resultados mediante dígitos en una pantalla, en lugar de lectura en una escala (digitales).
- Amplificador para aumentar la sensibilidad, para medida de tensiones o corrientes muy pequeñas o resistencias de muy alto valor.
- Medida de inductancias y capacitancias.
- Comprobador de diodos y transistores.
- Temperatura
- Otras de comunicación digital.



figura 13: multímetro con funciones avanzadas

- Poseen una llave selectora para elegir el tipo de medida a realizar.
- En las medidas de corriente directa (CD), la polaridad de los terminales debe ser observada para conectar apropiadamente el instrumento. Esta precaución no es necesaria para las medidas de corriente alterna (CA).
- La medida de precaución más importante es que en las medidas de tensión y corriente se debe observar las escalas. Es conveniente utilizar siempre la escala mayor en la primera medida, luego la corregirla si es necesario.

### 3. ARMANDO CIRCUITOS

#### 3.1 EJERCICIOS BÁSICOS:

Realice las siguientes prácticas con apoyo del auxiliar o el docente:

#### MEDIDA DE VOLTAJES

Medida de  $V_{CA}$   
 220 ó 110  $V_{CA}$   
 (enchufes del laboratorio)

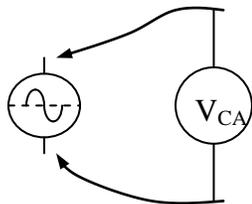


figura 14: midiendo el voltaje de una fuente alterna

Medida de  $V_{CC}$   
 0 a 24  $V_{CC}$  (fuente laboratorio)  
 Mida también en:  
 Pilas de calculadoras,  
 celulares, relojes, etc.

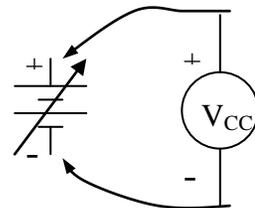


figura 15: midiendo el voltaje de una fuente continua

Recuérdese que para medir voltajes o intensidades, deben emplearse voltímetros y amperímetros CA o CC, de acuerdo a si se va a medir corriente alterna o continua. Cuando es continua además debe respetarse la polaridad como se muestra en la figura 15; mientras que si se mide CA, no tiene importancia la polaridad.

#### MEDIDA DE CONTINUIDAD

Cuando la resistencia eléctrica entre dos puntos es casi nula, entonces se dice que hay continuidad. Es útil para determinar por ejemplo, si hay conexión eléctrica a través de un conductor, de un extremo a otro. Se puede conocer también si entre dos bornes ha habido corto circuito (cuando se unen dos cables con diferencia de voltaje producen chispa y se funden)

Haciendo uso de la función continuidad del multímetro, determine de una maraña de cables, para los extremos A,B,C, sus correspondientes en el otro extremo X,Y,Z.



figura 16: midiendo continuidad

#### MEDIDA DE LA RESISTENCIA

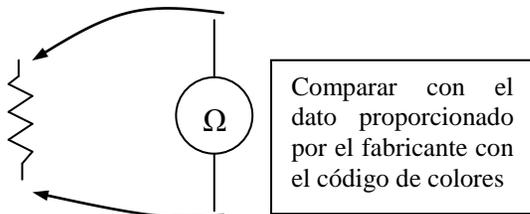


figura 17: midiendo la resistencia de un elemento resistivo

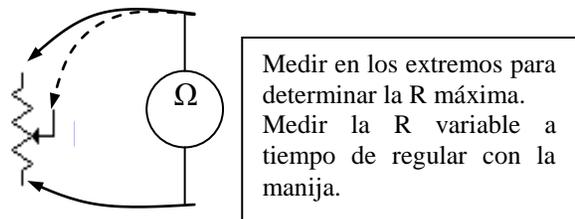


figura 18: midiendo la resistencia en un reóstato

3.2 GENERACIÓN DE  $V_{CC}$  REGULABLE CON UN REÓSTATO: Si la fuente de alimentación no cuenta con la función de regulación de voltaje, se puede hacer uso de un reóstato para generar una salida de  $V_{CC}$  cuya amplitud se pueda graduarse regulando el reóstato, figuras 19 y 20.

Si en vez de voltímetro se empleara un foco, se apreciaría como la intensidad de éste subiría y bajaría en función de la regulación realizada por el reóstato. La desventaja de este circuito es su baja eficiencia energética pues, se disipa calor a través del reóstato.

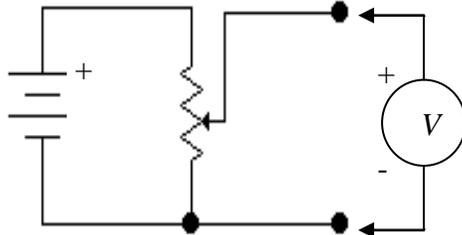


figura 19: diagrama eléctrico del circuito regulador de voltaje

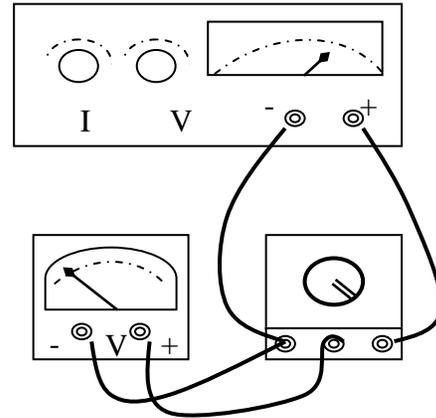


figura 20: vista esquemática del circuito regulador de voltaje

Si la fuente de alimentación contara con regulador de voltaje interno, entonces el circuito contaría con dos formas de regular el voltaje, a través de la manija reguladora del reóstato además del de la fuente. Aprecie la función del limitador de corriente regulando la manija "I" de la fuente, cuando éste está en valor bajo, (no admite corrientes elevadas) la señal de sobre carga "over load" (del inglés sobrecarga) se enciende y se corta el suministro de voltaje. Oprima (si se dispone) el botón "reset" (del inglés reinicio) para reiniciar.

NOTA: Si se va a utilizar el reóstato como medio de regulación del voltaje según se muestran en las figuras 19 y 20, tenga cuidado en que la corriente que circula por dicho reóstato no exceda niveles mayores a los que éste puede soportar (5 A). En general, mientras menores niveles de corriente eléctrica (intensidad) emplee en los circuitos, menos dañará a los mismos.

3.3 PRACTICANDO CON CIRCUITOS: Arme el circuito mostrado en la figura 21 (mantenga la fuente apagada).

Nótese la polaridad del amperímetro y voltímetro, los positivos se conectan en los puntos de mayor potencial o más próximos al positivo de la fuente "E", y los negativos con el negativo o tierra del circuito. La figura 22 muestra el esquema de la vista física de una de las formas de armar el circuito.

Nótese la simplicidad del diagrama eléctrico de la figura 21 respecto a la representación de la figura 22, por ello el estudiante debe acostumbrarse a usar los símbolos de la norma de diagramas eléctricos.

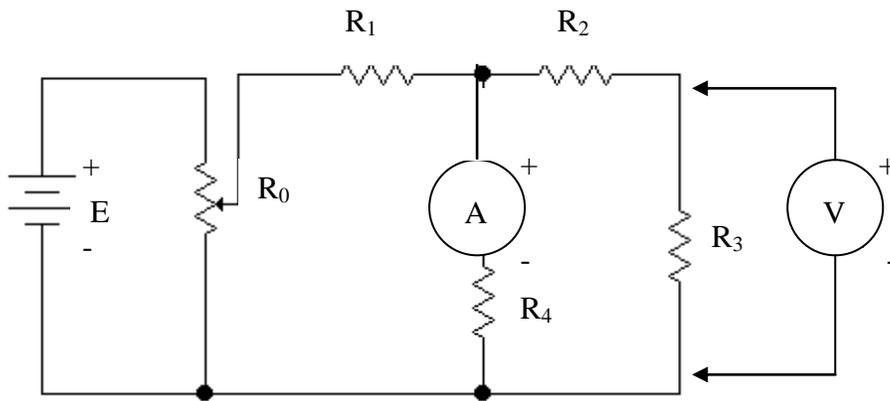


figura 21: diagrama eléctrico de un circuito

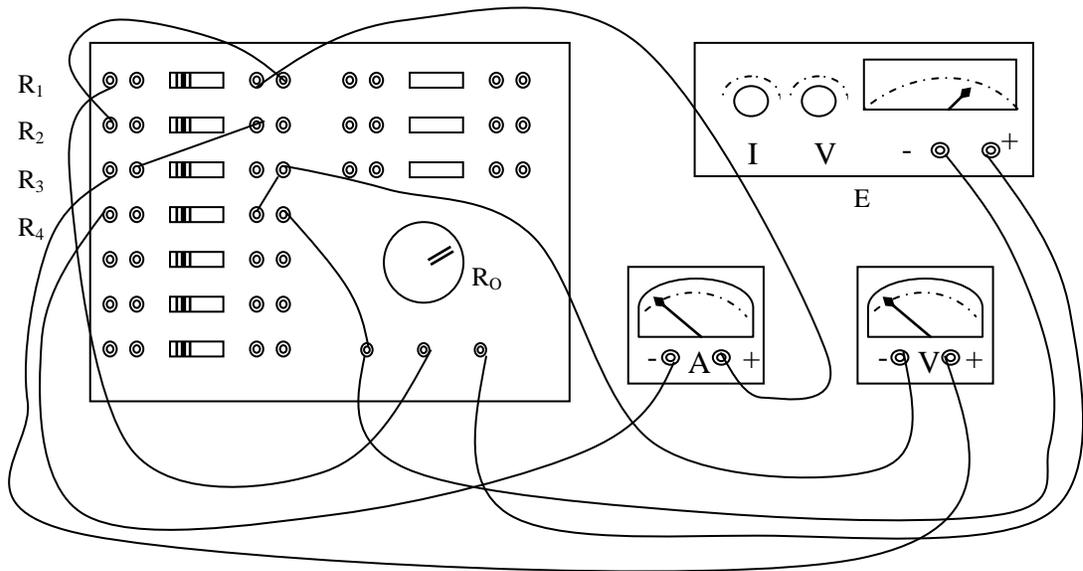


figura 22: vista esquemática de una de las formas de conectar el circuito de la figura 21

Circuitos en serie y paralelo:

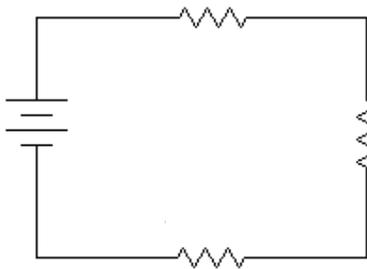


figura 23: resistencias en serie

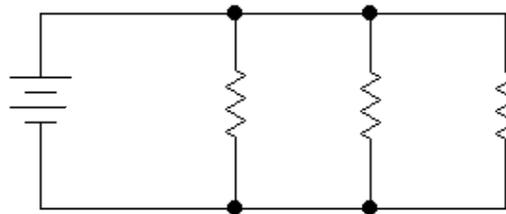


figura 24: resistencias en paralelo

Circuito combinado:

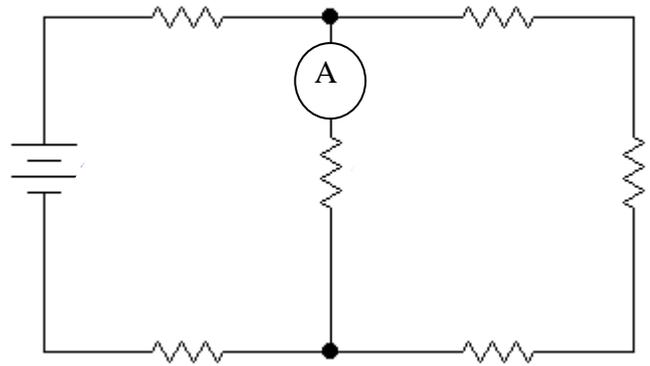


figura 25: circuito combinado

### CUESTIONARIO

1. ¿Qué precauciones debe tomar antes de emplear un amperímetro en un circuito eléctrico?
2. ¿Cómo puede detectar que existe corte entre los extremos de un conductor eléctrico, al no haber contacto visual con el mismo?
3. ¿Cuáles son las desventajas de emplear un reóstato en la regulación de voltaje?
4. ¿Para que sirve el “over load” de una fuente de poder o alimentación?
5. ¿Qué sucede si conecta un voltímetro con polaridad cambiada?
6. ¿Qué tipo de resistencias usó en laboratorio?
7. ¿Es importante en las resistencias la polaridad?
8. ¿Por qué debe desconectarse una resistencia antes de ser medida con el ohmiómetro?
9. Dibuje la vista esquemática (similar a la figura 22) del circuito mostrado en la figura 25
10. ¿Cuál es la diferencia entre  $V_{CC}$  y  $V_{CA}$ ?

## LEY DE OHM

### 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

#### 1.1 INTRODUCCIÓN

Como resultado de sus investigaciones, en 1827 Georg Simon Ohm descubrió una de las leyes fundamentales de la corriente eléctrica, que hoy conocemos como “Ley de Ohm”. Esta importante ley postula que: “la corriente que circula por un circuito eléctrico cerrado, es directamente proporcional a la tensión que tiene aplicada, e inversamente proporcional a la resistencia que ofrece a su paso la carga que tiene conectada”. La representación matemática de dicha ley es la siguiente:

$$I = \frac{V}{R} \quad (1) \quad \text{o} \quad V = I \times R \quad (2) \quad \text{o} \quad R = \frac{V}{I} \quad (3)$$

Esta Ley es aplicable sólo a elementos resistivos, los cuales serán descritos a continuación.

#### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

##### LEY DE OHM

En la ciencia, para producir un efecto debe existir una causa y como consecuencia, para producir un efecto la causa debe vencer la oposición presente. En electricidad esta regla se demuestra; la fuerza electromotriz “*fem*” o diferencia de potencial “*V*” es la causa, la corriente “*i*” es el efecto y la oposición es la resistencia “*R*”. La relación entre voltaje, corriente y resistencia se compara por analogía en un circuito eléctrico con uno hidráulico. Cuando se aumenta la fuerza electromotriz, se aumenta la corriente, entonces se dice que la corriente es directamente proporcional al voltaje (*fem*). Otra interpretación es enunciar que la corriente es inversamente proporcional a la resistencia, en este caso, si la resistencia se hace mayor, la corriente se hará menor.

Al ser la fem o voltaje “*V*” la causa, se trata de la variable independiente, entonces la representamos gráficamente como abscisa. Mientras que la intensidad “*i*” al ser el efecto, resulta siendo la variable dependiente y la representamos en la ordenada, quedándonos:

$$i = \frac{1}{R} \times V, \text{ como se muestra en la figura 1}$$

Consecuentemente  $\frac{1}{R}$  es la pendiente.

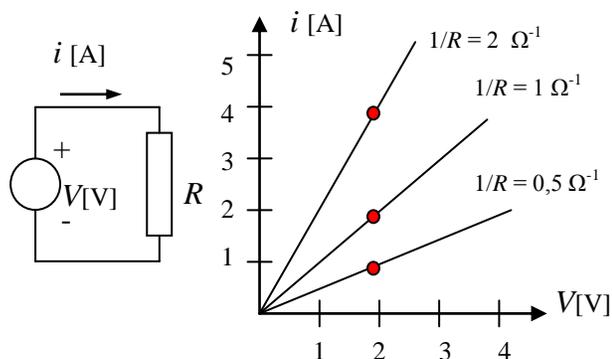
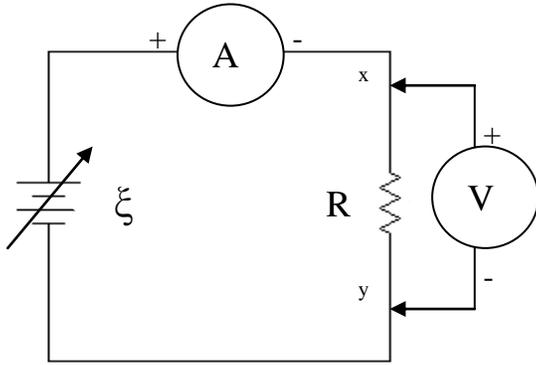
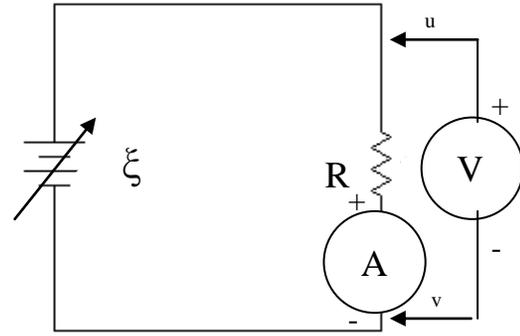


figura 1: relación  $i$  vs  $V$  en un circuito con una resistencia  $R$

Hay quienes prefieren representar la intensidad en las abscisas y la tensión en las ordenadas, ello a fin de hacer coincidir la pendiente con la resistencia. Para el experimento se debe emplear un amperímetro para medir la intensidad de corriente y un voltímetro para medir la diferencia de potencial, según una de las siguientes disposiciones:

figura 2: voltímetro lee caída de voltaje en  $R$ figura 3: amperímetro lee intensidad en  $R$ 

**INFLUENCIA DE LA RESISTENCIA INTERNA DEL VOLTÍMETRO:** El circuito de la **figura 2** tiene el atributo que el voltímetro lee directamente la caída de voltaje en la resistencia pero en cambio, el amperímetro lee la intensidad que circula por la resistencia más la que circula por el voltímetro. El voltímetro para funcionar requiere de un bobinado, mismo que se constituye en una *resistencia metálica*  $R_V$  “*resistencia interna del voltímetro*”.

Aplicando la Ley de nodos a “x” de la figura 2, tenemos:  $i_A = i_R + i_V$ , luego la Ley de Ohm en  $i_V$ , quedando:

$$i_A = i_R + \frac{V_{xy}}{R_V} = i_R + \frac{R \times i_R}{R_V}, \text{ es decir: } i_A = i_R \cdot \left(1 + \frac{R}{R_V}\right) \quad (4), \text{ la ecuación (4) muestra que el amperímetro}$$

leerá la corriente de la resistencia  $i_A = i_R$ , si se cumple que  $R_V \gg R$ , consecuentemente un voltímetro debe tener una resistencia interna muy grande para influir de menor modo en un circuito.

**INFLUENCIA DE LA RESISTENCIA INTERNA DEL AMPERÍMETRO:** El circuito de la **figura 3** tiene el atributo que el amperímetro lee directamente la intensidad de corriente en la resistencia pero en cambio, el voltímetro lee la diferencia de potencial entre “u” y “v”, o sea, la caída de tensión en la resistencia más la que cae en el amperímetro. El amperímetro para funcionar requiere de un bobinado, mismo que se constituye en una *resistencia metálica*  $R_A$  “*resistencia interna del amperímetro*”.

La caída de tensión entre “u” y “v” nos da:  $V_{uv} = V_V = V_R + V_A$ , usando la Ley de Ohm da:

$$V_V = V_R + i_A \times R_A = V_R + \frac{V_R}{R} \times R_A, \text{ es decir: } V_V = V_R \cdot \left(1 + \frac{R_A}{R}\right) \quad (5), \text{ la ecuación (5) muestra que el}$$

voltímetro leerá la caída de tensión en la resistencia  $V_V = V_R$ , si se cumple que  $R_A \ll R$ , consecuentemente un amperímetro debe tener una resistencia interna muy pequeña para influir de menor modo en un circuito.

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Debe validarse la ecuación:  $i = \frac{V}{R}$  (6), haciendo:  $G = \frac{1}{R}$  (7), “ $G$ ” se conoce como *conductancia*”, (7) en (6) da:

$i = G \times V$  (8), ecuación de una recta  $y = a + b \cdot x$ , con corte en la ordenada “a” igual a cero y pendiente “b” igual a  $G$ , de donde puede despejarse el valor de  $R$ .

## ERROR DE LA ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS REFERENCIALES

“*a*” (de la regresión lineal) Bilateral o de dos colas

$$\text{Hipótesis nula } H_0 : \quad a = 0$$

$$\text{Hipótesis alternativa } H_1 : \quad a \neq 0$$

“*b*” (de la regresión lineal) Bilateral o de dos colas

$$\text{Hipótesis nula } H_0 : \quad b = G = \frac{1}{R}$$

$$\text{Hipótesis alternativa } H_1 : \quad b = G \neq \frac{1}{R}$$

Donde  $R$  es la resistencia que se medirá con un ohmiómetro.

### 1.4 OBJETIVOS

- Validar la Ley de Ohm.
- Cálculo de una resistencia mediante la Ley de Ohm.
- Interpretar la influencia de las resistencias internas de los instrumentos de medida.

### 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

#### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Tablero de resistencias
- Amperímetro
- Voltímetro
- Fuente de voltaje *fem* regulable (si no se dispone de una fuente regulable, usar el circuito con reóstato para variar el voltaje)
- Cables de conexión
- Multímetro

#### 1.5.2 MEDIDA DE LAS CONSTANTES

1. Escoger una resistencia cementada o una de carbón en buen estado.
2. Medir el valor de la resistencia con un ohmiómetro.
3. Calcular el valor de la resistencia haciendo uso del código de colores. (Resistencia Nominal  $R_n$ ).
4. Medir las resistencias internas del amperímetro para cada una de sus escalas a emplearse.
5. Medir las resistencias internas del voltímetro para cada una de sus escalas a emplearse.

#### 1.5.3 MEDIDA DE LAS VARIABLES

1. Conectar el circuito mostrado en la figura 2.
2. Ajustar en la fuente regulable, voltaje mínimo de alimentación y el limitador de corriente a un valor acorde la *potencia nominal* de la resistencia a emplearse.
3. Encienda la fuente con autorización del docente o ayudante.
4. Registrar los valores de voltaje e intensidad medidos con el voltímetro y amperímetro.
5. Incrementar ligeramente el voltaje de alimentación haciendo uso del regulador de voltaje de la fuente, repetir desde el paso anterior para obtener ocho pares de datos.
6. A fin de proteger los instrumentos de medida, siempre es recomendable trabajar con los valores más bajos de intensidad posible.

7. Medir nuevamente con el ohmiómetro el valor de la resistencia de prueba.
8. Conectar el circuito mostrado en la figura 3.
9. Repetir el procedimiento realizado con el circuito de la figura 2.

## 2. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 REPRESENTACIONES GRÁFICAS

- En un gráfico  $i$  vs  $V$ , representar  $i = \frac{1}{R} \times V$  con el valor de “ $R$ ” obtenida con el ohmiómetro.
- En el mismo gráfico, representar la misma relación con “ $R$ ” obtenida con el código de colores (si la resistencia tuviera el código)
- Aplicar regresión lineal en la forma:  $y = a + b \cdot x$  ó  $i = G \cdot V$ , con  $n$  medidas,

$$i = \frac{\sum V_i^2 \sum i_i - \sum V_i \sum i_i V_i}{n \sum V_i^2 - (\sum V_i)^2} + \frac{n \sum V_i i_i - \sum V_i \sum i_i}{n \sum V_i^2 - (\sum V_i)^2} \times V$$

$$r = \frac{n \sum i_i V_i - \sum V_i \sum i_i}{\sqrt{[n \sum V_i^2 - (\sum V_i)^2] \cdot [n \sum i_i^2 - (\sum i_i)^2]}} , \quad \text{coeficiente de correlación}$$

- En el mismo gráfico, representar la línea ajustada con los datos obtenidos del circuito de la figura 2.
- En el mismo gráfico, representar la línea ajustada con los datos obtenidos del circuito de la figura 3.
- En el mismo gráfico, representar la línea ajustada con los datos obtenidos del circuito de la figura 2, corrigiendo las lecturas del amperímetro con la ecuación 4.
- En el mismo gráfico, representar la línea ajustada con los datos obtenidos del circuito de la figura 3, corrigiendo las lecturas del voltímetro con la ecuación 5.

### 2.2 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

De la ecuación:  $i = a + b \cdot V$ , se emplea para validar la Ley de Ohm mediante  $a=0$  y  $b=G$ . La correlación o dependencia lineal entre las variables  $i$  y  $V$  se valida con el coeficiente de correlación lineal de Pearson. Escoja una de las líneas ajustadas que desea validar y aplique:

ERROR DE LA ESTIMACIÓN ( $a$  y  $b$ ):

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|a-0|}{s_a}$ ,

$$\text{donde: } s_a = s_{i/V} \times \sqrt{\frac{\sum V_i^2}{n \sum V_i^2 - (\sum V_i)^2}} ; \quad s_{i/V} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot V_i) - i_i]^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas:  $t$  de tablas:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t \text{ calculado} < t \text{ de tablas}$ .

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|b_{exp} - b_{teo}|}{s_b} = \frac{|G_{exp} - G_{teo}|}{s_G}$ , donde:

Donde:  $b = G_{teo} = \frac{1}{R}$ , el  $G_{exp}$  se obtiene de la recta.

$$s_G = \frac{s_{i/V}}{\sqrt{\sum V_i^2 - \frac{1}{n}(\sum V_i)^2}}, \quad s_{i/V} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot V_i) - i_i]^2}{n-2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas: *t de tablas*:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse: *t calculado* < *t de tablas*.

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la ley de Ohm no ha sido validada porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  (99% nivel de confianza).

DE LINEALIDAD: *r* debe ser próximo a 1.

## 2.3 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

- 1 ¿Usted cree que el hecho de escoger una resistencia cementada o una de carbón puede definir el nivel de linealidad de los resultados?
- 2 Enuncie una ecuación equivalente a la Ley de Ohm aplicable a un sistema hidráulico usando las variables presión, caudal y longitud equivalente de tubería.
- 3 ¿Qué conclusiones obtiene respecto a la diferencia de los resultados obtenidos en el experimento entre las dos configuraciones de conexión del voltímetro y amperímetro?
- 4 ¿Considera que la resistencia se mantuvo constante mientras se obtenían lecturas?
- 5 ¿Cómo explica que los bobinados de los motores y relés tengan resistencia si están hechos de conductor cobre?.
- 6 ¿Cómo sería la representación gráfica *i* vs *V* de un superconductor?, averigüe la representación de la curva que relaciona *i* con *V* para un diodo. ¿Cómo interpreta esta característica?, ¿su resistencia en el primer y tercer cuadrante?.
- 7 La termoresistencia o RTD un reconocido sensor de temperatura, no es más que una resistencia metálica y cuyo coeficiente de temperatura  $\alpha$  (coeficiente olveriano de temperatura) descrito en el capítulo anterior ecuación 4 es constante. Averigüe la curva característica del RTD PT100 y represéntela.
- 8 La Ley de Joule está dada por:  $P = V \cdot i$  que expresa la cantidad de calor en [W] que disipa una resistencia en un circuito de corriente continua, calcule la potencia máxima que tuvo que soportar la resistencia en el experimento, este cálculo es importante para conocer si se sobrepasó el valor de la potencia nominal ( $P_n$ ) de la resistencia.
- 9 ¿Por qué se recomienda trabajar con los valores más bajos de corriente posible?, ¿tiene algo que ver con el calentamiento de los equipos?, explique.
- 10 ¿Por qué aquellos elementos que son buenos conductores de electricidad, también lo son para el flujo de calor por conducción?

# LEY DE OHM

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

## Parámetros o constantes

medida directa

*R*(medida con el ohmiómetro) antes de empezar el experimento:

*R<sub>n</sub>*(nominal según código de colores si lo tuviera):

Material de la resistencia:

*R*(medida con el ohmiómetro) al finaliza el experimento:

Resistencia interna voltímetro					
Escala del voltímetro					

Resistencia interna amperímetro					
Escala del amperímetro					

## Variables

LECTURAS OBTENIDAS CON EL CIRCUITO DE LA FIGURA 2

<i>n</i> número de medición												
variable independiente voltaje $V_i$												
variable dependiente intensidad $i_i$												

LECTURAS OBTENIDAS CON EL CIRCUITO DE LA FIGURA 3

<i>n</i> número de medición												
variable independiente voltaje $V_i$												
variable dependiente intensidad $i_i$												

## CONDENSADOR VARIABLE

### 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

#### 1.1 INTRODUCCIÓN

El capacitor o condensador es uno de los elementos eléctricos de mayor uso en la ingeniería, aunque su principio de funcionamiento se basa en el simple hecho de almacenar carga eléctrica, su ámbito de aplicación es bastante extenso, desde micro circuitos a electrónica de potencia.

En el presente experimento se estudiará al condensador de láminas conductoras y paralelas, cuya disposición se muestra en la figura 1.

La capacitancia “  $C$  “ es la capacidad de almacenar carga eléctrica y ésta es inversamente proporcional a la separación “  $d$  “ de las placas.

En el experimento, se dispondrá de un condensador de laboratorio como el mostrado en la figura 3, en el que pueda regularse el valor de “  $d$  ” o distancia de separación, de manera de obtener un condensador variable.

También se estudiará la influencia del medio “  $\epsilon$  ” interpuesto entre dichas placas, específicamente se probará con aire y papel.

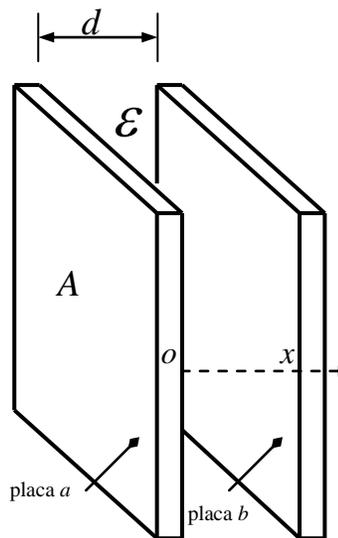


figura 1: condensador de placas paralelas

#### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

**CAPACIDAD O CAPACITANCIA DE UN CONDENSADOR:** Dos superficies conductoras se dice que se encuentran en situación de influencia total (placas  $a$  y  $b$  en la figura 1), cuando todas las líneas de campo eléctrico que parten de una van a parar a la otra. En este caso se dice que las dos superficies forman un condensador. La carga representada por “  $Q$  “ en las dos superficies es la misma, aunque de signo opuesto, y es proporcional a la diferencia de potencial entre las superficies:

$$Q_a = C(V_a - V_b) \quad (1) \quad Q_b = -Q_a = C \cdot (V_b - V_a) \quad (2)$$

Cuando la carga se mide en Culombios [C], y la tensión o diferencia de potencial entre las placas  $a$  y  $b$  está en Voltios [V], la capacidad está en Faradios [F]. En la mayoría de las situaciones prácticas la capacidad es muy pequeña, por lo que se emplean submúltiplos como el micro Faradio [μF] o el nano Faradio [nF].

**CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR PLANO:** Cuando se tienen dos superficies metálicas, de área  $A$ , separadas una distancia  $d$  (mucho menor que las dimensiones de las placas), puede admitirse que aproximadamente, el campo eléctrico va de la placa  $a$  hacia  $b$  (placa  $a$  con carga positiva, placa  $b$  con carga negativa) en la dirección  $ox$  (figura 1), perpendicular a las placas. Si suponemos la placa inferior a una tensión  $V_0$  y la superior a tierra, el problema eléctrico se reduce a resolver la ecuación de Laplace para el potencial electrostático con las correspondientes condiciones de contorno:

$$\nabla^2 \phi = \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0, \quad \phi(0) = V_0, \quad \phi(d) = 0 \quad \dots, \text{ siendo su solución:}$$

$$\phi(x) = \frac{V_0}{d}(d - x) \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \phi = \frac{V_0}{d} \hat{i} \quad (3)$$

Conocido el campo, la carga se calcula por aplicación de la Ley e Gauss:

$$Q = \varepsilon \cdot \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (4), \text{ al reemplazar (3) en (4) se tiene: } Q = \varepsilon \oint \left( \frac{V_0}{d} dA \right) \cos 0^\circ = \frac{\varepsilon \cdot A \cdot V_0}{d} \quad (5),$$

al reemplazar en la ecuación de la definición (1):  $C = \frac{Q}{V_0}$ , da:  $C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$  (6), cuando la placa es circular

de diámetro  $D$ , se tiene:  $C = \frac{\varepsilon \cdot \pi \cdot D^2}{4d}$  (7) Ley que se desea comprobar experimentalmente.

**EFFECTOS DE BORDE:** La ecuación (7), es una aproximación válida cuando la distancia entre las placas es mucho menor que su diámetro. Esta aproximación desprecia los llamados efectos de borde (figura 2 a) debido a la deformación de las líneas de campo en la periferia de las placas (figura 2 b). El valor exacto de estos efectos depende de cada caso concreto y normalmente requiere resolver la ecuación de Laplace por métodos numéricos. Dos propiedades, no obstante, son generalmente aplicables:

- Aumentan la capacidad del sistema.
- Son proporcionalmente más importantes a medida que la distancia entre placas aumenta.

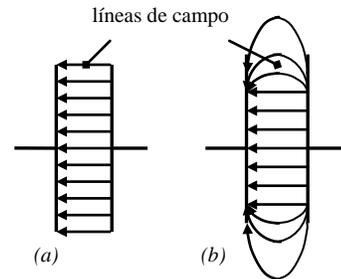


figura 2: efecto de borde

**DIELÉCTRICO DEL CONDENSADOR:** El material insertado en el interior de las dos placas es conocido como dieléctrico y éste define el valor de la “ $\varepsilon$ ” (permitividad absoluta del medio). En cambio, si el espacio entre las dos placas está vacío, se tiene “ $\varepsilon_0$ ” (permitividad del vacío), cuyo valor es:  $8,85 \times 10^{-12} [C^2/N m^2]$ , entonces resulta más conveniente expresar la permitividad de un dieléctrico en función a la permitividad del vacío. Es decir:  $\varepsilon = K \cdot \varepsilon_0$  (8), donde  $K$  es el coeficiente dieléctrico, entonces  $K = 1$  para el vacío, en cambio para el aire atmosférico vale 1,00059, prácticamente iguales, sin embargo otros dieléctrico como el vidrio y el papel tienen coeficientes eléctricos  $K = 4$  a 10. Por lo tanto, la capacitancia de un condensador será mayor si el dieléctrico es un material como vidrio o papel que simplemente aire.

Con (8), la ecuación (7) también puede escribirse como:  $C = \frac{K \cdot \varepsilon_0 \cdot \pi \cdot D^2}{4 \cdot d}$  (9)

Para comprobar la linealidad de la variación de la capacitancia “ $C$ ” en función de la distancia de separación “ $d$ ”, la

ecuación (9) la expresamos como:  $\frac{1}{C} = \frac{4}{K \cdot \varepsilon_0 \cdot \pi \cdot D^2} \times d$  (10) o:  $Y = B \times d$  (11)

Donde:  $Y = \frac{1}{C}$  (12),  $B = \frac{4}{K \cdot \varepsilon_0 \cdot \pi \cdot D^2}$  (13)

De contarse con un capacitómetro (instrumento empleado para encontrar la capacitancia de un condensador), para determinar los valores de “ $C$ ” y conocido el diámetro “ $D$ ” de las placas del condensador de placas paralelas, es posible determinar la permitividad del medio “ $\varepsilon$ ”.

## CONEXIÓN DE CAPACITORES EN SERIE

Si se conectan capacitores en serie, uno tras otro, la capacitancia resultante o equivalente viene dada por:

$$\frac{1}{C_{equiv.}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}, \quad \text{de } n \text{ capacitores conectados en serie.}$$

Si se conectan varios dieléctricos en serie uno junto a otro entre dos placas (como un sándwich), se obtiene el mismo efecto:

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

Debe validarse la ecuación  $Y = B \times d$ , ecuación de una recta  $y = a + b \cdot x$ , con corte en la ordenada “a” igual a cero y pendiente “b” igual a B, de donde puede despejarse el valor de  $\epsilon_0$ .

#### ERROR DE LA ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS REFERENCIALES

“a” (de la regresión lineal)

$$\begin{aligned} \text{Hipótesis nula } H_0 : & \quad a = 0 \\ \text{Hipótesis alternativa } H_1 : & \quad a \neq 0 \quad \text{Bilateral o de dos colas} \end{aligned}$$

“b” (de la regresión lineal)

El dieléctrico a emplearse será el aire, pero como  $K \approx 1$ , se asume permitividad del aire igual que la del vacío.

$$\begin{aligned} \text{Hipótesis nula } H_0 : & \quad b = B = \frac{4}{8,85 \times 10^{-12} \cdot \pi \cdot D^2} \\ \text{Hipótesis alternativa } H_1 : & \quad b = B \neq \frac{4}{8,85 \times 10^{-12} \cdot \pi \cdot D^2} \quad \text{Bilateral o de dos colas} \end{aligned}$$

Donde  $D$  es el diámetro de las placas en [m]

### 1.4 OBJETIVOS

- Validar la ecuación (9) para la determinación de la capacitancia de un condensador.
- Encontrar la permitividad del vacío  $\epsilon_0$ .
- Encontrar el coeficiente dieléctrico  $K$  para varios materiales dieléctricos.
- Encontrar el coeficiente dieléctrico y la capacitancia resultante de colocar tres dieléctricos en serie.
- Interpretación de los efectos de borde en un condensador de placas paralelas.

## 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Condensador didáctico con características:  
Placa planas de aluminio.  
Máxima variación superficie  $\pm 0,2$  [mm].  
Soportes de aislamiento acrílico.  
Regulación de “ $d$ ” 1 a 116 [mm].  
Capacitancia de 2,3 a 280 [pF].  
Paralelismo entre placas.  
Cable con capacitancia despreciable.  
(figura 3).
- Capacímetro calibrado.
- Vernier o nonio
- Placa dieléctrica.  
Resma de papel.  
Otras placas (dieléctricos) de espesor constante y material conocido.  
Nota: las dimensiones del dieléctrico deben ser mayores que la de las placas.



figura 3: Condensador didáctico

### 1.5.2 MEDIDA DE LAS CONSTANTES

- Medir el diámetro de las placas del condensador.

### 1.5.3 MEDIDA DE LAS VARIABLES CON EL DIELECTRICO AIRE (ASUMIDO VACÍO)

#### MEDIDA DE LA CAPACIDAD EN FUNCIÓN DE LA DISTANCIA Y OBTENCIÓN DE $\epsilon_0$

2. Conectar el cable a los bornes de la placa y del capacímetro.
3. Con ayuda del vernier, fíjese la distancia entre las placas en el condensador en 0,5 [mm].
4. Encienda el capacímetro en máxima sensibilidad y mídase el valor de la capacidad.
5. Para distancias de 0,5 [mm] a 3,0 [mm] con intervalos no mayores a 0,5 [mm], hállese la capacidad. Antes de cada medida espérese a que el capacímetro marque un valor estacionario.

#### INFLUENCIA DE LOS EFECTOS DE BORDE

1. Mídase la capacidad para las distancias desde 4,0 [mm] a 15 [mm], en intervalos de 1 [mm], añádase a la lista los valores para  $d = 1$  [mm] y 3 [mm], ya obtenidos en el procedimiento anterior.

### 1.5.4 MEDIDA DE LAS VARIABLES CON EL DIELECTRICO ESCOGIDO

1. Selección del dieléctrico, si no se dispondría de láminas de espesor especificado, podría emplear resmas de papel tamaño carta o mayor.
2. Introducir el dieléctrico entre las placas (espesor menor a 1 [mm]).
3. Ajustar con mucho cuidado el dieléctrico entre las placas del condensador evitando de dejar espacios de aire entre ellas (tampoco proceda a comprimir en exceso al dieléctrico pues de este modo se descalibra el regulador de distancia del condensador).
4. Mídase la capacidad del sistema.
5. Repita el proceso con al menos otros dos materiales (dieléctricos).
6. Coloque los tres materiales juntos (cara con cara) y colóquelos en el condensador obteniendo así el equivalente a tres capacitores en serie.

NOTA: Todas las mediciones de capacidad con el capacitómetro, deben realizarse con el capacitor o condensador desconectado a cualquier fuente de alimentación y verificar que el mismo esté descargado, pues el capacitómetro cuenta con su propia fuente de voltaje de CA para cargar al condensador.

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 VALIDACIÓN DE LA HIPÓTESIS

- Con los datos obtenidos en la primera parte del experimento, rango “ $d$ ” 0,5 a 3,0 [mm],
- Determinar:  $Y_i = \frac{1}{C_i}$ , para cada  $d_i$ . Representar en un gráfico  $Y$  vs  $d$ ,
- Regresión lineal en la forma:  $y = a + b \cdot x$  ó  $Y = B \cdot d$ , con  $n$  medidas

$$Y = \frac{\sum d_i^2 \sum Y_i - \sum d_i \sum Y_i d_i}{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2} + \frac{n \sum d_i Y_i - \sum d_i \sum Y_i}{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2} \times d \quad (14)$$

$$r = \frac{n \sum Y_i d_i - \sum d_i \sum Y_i}{\sqrt{[n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2] \cdot [n \sum Y_i^2 - (\sum Y_i)^2]}} \quad (15) \text{ coeficiente de correlación}$$

- En el mismo gráfico  $Y$  vs  $d$  representado anteriormente, trazar la recta ajustada.
- De la ecuación:  $Y = a + b \cdot d$ , donde  $a$  debe ser cero se emplea para validar la ecuación de la capacitancia y  $b=B$  para determinar el valor de  $\epsilon_0$ .

ERROR DE LA ESTIMACIÓN ( $a$  y  $b$ ):

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|a-0|}{s_a}$ ,

$$\text{donde: } s_a = s_{y/d} \times \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n \sum d_i^2 - (\sum d_i)^2}} \quad ; \quad s_{y/d} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot d_i) - Y_i]^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n - 2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas:  $t$  de tablas:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t \text{ calculado} < t \text{ de tablas}$ .

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|b_{exp} - b_{teo}|}{s_b} = \frac{|B_{exp} - B_{teo}|}{s_B}$ , donde:

Donde:  $b = B_{teo} = \frac{4}{\epsilon_{0teo} \cdot \pi \cdot D^2}$ , es decir:  $B_{teo} = \frac{4}{8,85 \times 10^{-12} \cdot \pi \cdot D^2}$ , el  $B_{exp}$  se obtiene de la recta.

$$s_B = \frac{s_{y/d}}{\sqrt{\sum d_i^2 - \frac{1}{n} (\sum d_i)^2}} \quad , \quad s_{y/d} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot d_i) - Y_i]^2}{n - 2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas: *t de tablas*:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse: *t calculado* < *t de tablas*.

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la ecuación de capacitancia no ha sido validada porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas).

## 2.2 CÁLCULOS COMPLEMENTARIOS

- Calcular:  $\varepsilon_{0\text{exp}} = \frac{4}{B_{\text{exp}} \cdot \pi \cdot D^2}$ ,  $B_{\text{exp}}$  se obtiene de la recta ajustada.
- Con los datos obtenidos en la primera y segunda parte del experimento, rango “*d*” 1,0 a 15,0 [mm],
- Determinar:  $Y_i = \frac{1}{C_i}$ , para cada  $d_i$ . Representar en un gráfico *Y* vs *d*,
- Ajustar nuevamente a una línea haciendo uso de las ecuaciones (14) y (15)
- Grafique la recta ajustada.
- Represente ahora la recta teórica con  $Y = \frac{4}{8,85 \times 10^{-12} \cdot \pi \cdot D^2} \times d$  en la misma gráfica.
- Interprete la diferencia entre las dos rectas.
- Calcule el valor del coeficiente dieléctrico de la ecuación (9), para cada dieléctrico empleado.

$$K = \frac{4 \cdot C \cdot d}{\varepsilon_{0\text{exp}} \cdot \pi \cdot D^2}$$

- Calcule el coeficiente dieléctrico para el caso de tres dieléctricos conectados en serie.
- Calcule la relación:  $\frac{1}{C_{\text{equiv.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$  y compárelo con el valor medido con el capacitómetro.
- (Opcional): Aplique hipótesis estadística para determinar si el  $C_{\text{equiv.}}$  obtenido en el punto anterior es significativamente igual que el medido con el capacitómetro.

## 2.3 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

1. Los efectos de borde, ¿aumentan o disminuyen la capacidad? Justifíquese a partir de los datos experimentales. ¿Por qué puede ser complicado calcular teóricamente la influencia de los bordes?
2. Supóngase que debido a la holgura del sistema, existe una capa de aire de 0,1 [mm] de espesor entre cada placa metálica y el dieléctrico empleado. ¿En qué forma afecta esto a los resultados? ¿se obtendría una permitividad del dieléctrico mayor o menor a la correcta?
3. Según la ecuación 6, un capacitor de placas circulares (como el del experimento) tendrá la misma capacitancia que uno con placas cuadradas. Sin embargo, debido a los efectos de borde tendrán diferente valor de capacitancia, indique cuál registrará mayor capacitancia, explique.
4. Averigüe si la reducción de la presión atmosférica debida a la altitud, influye en el resultado de  $\varepsilon$ .
5. Averigüe el coeficiente dieléctrico teórico de los materiales escogidos y encuentre la diferencia porcentual.
6. Como los condensadores no dejan circular corriente continua. Entonces, ¿en que principio se basan los capacitómetros para medir la capacidad de un condensador.
7. ¿Qué consideraciones debe realizar si el dieléctrico tiene un área inferior que el de las placas?
8. ¿Por qué no se puede emplear un material conductor como dieléctrico?
9. Teóricamente se obtendría el mismo valor si se empleara un condensador de placas cuadradas en vez de circulares, siempre y cuando tengan la misma área, ¿qué sucedería experimentalmente?
10. Explique el principio de operación de un sensor de proximidad capacitivo.

## CONDENSADOR VARIABLE

ESTUDIANTE:

GRUPO:

FECHA EXPERIMENTO:

VoBo:

### Parámetros o constantes

medida directa

*D*(Diámetro de la placa del condensador):

### Variables

MEDIDA DE LA CAPACIDAD EN FUNCIÓN DE LA DISTANCIA Y OBTENCIÓN DE  $\epsilon_0$  (0,5 a 3mm)

<i>n</i> número de medición											
variable independiente distancia $d_i$											
variable dependiente capacidad $C_i$ ( <i>directa</i> )											
$Y_i$ ( <i>indirecta</i> )											

INFLUENCIA DE LOS EFECTOS DE BORDE (4 a 15mm)

<i>n</i> número de medición												
variable independiente distancia $d_i$												
variable dependiente capacidad $C_i$												
$Y_i$ ( <i>indirecta</i> )												

DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DIELECTRICO

	Dieléctrico 1	Dieléctrico 2	Dieléctrico 3	Dieléctrico 1 +2+3
Material				
Espesor dieléctrico $d$				
Capacidad medida $C$				

otras variables intervinientes:

# PUENTE DE WHEATSTONE

## 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Un puente de Wheatstone es un instrumento eléctrico de medida inventado por Samuel Hunter Christie en 1832, mejorado y popularizado por Sir Charles Wheatstone en 1843. Se utilizaba para medir resistencias desconocidas mediante el equilibrio o balance de los brazos del puente constituido por cuatro resistencias, siendo una de ellas la resistencia desconocida o bajo medida y las otras tres conocidas sirven como referencia.

Esta configuración se emplea bastante en adquisición de señales físicas, con este circuito se convierten señales de resistencia ( $R_1, R_2, R_3$  o  $R_4$ ) en señales de voltaje  $V_m$  Dato (figura 1). Con ello se logra aprovechar las características de variación de la resistencia eléctrica de sensores como los termistores, termoresistencias, deformímetros y otros, el desequilibrio producido se traduce en una tensión  $V_m$  empleada para ejecutar funciones de control automático.

En el presente experimento,  $R_3$  y  $R_2$  se reemplazarán por una resistencia de hilo,  $R_1$  por una caja resistencias,  $V_m$  se detectará con un galvanómetro y  $R_x$  será la resistencia desconocida a determinar.

### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

Como se aprecia en la figura 1, el circuito es simétrico. Esta simetría hace que estos circuitos sean muy poco sensibles a interferencias o cambio de temperatura, pues las cuatro resistencias están expuestas a una influencia exterior idéntica, se compensarán los incrementos entre sí y no variará  $V_m$ .

El resultado de la medida es de naturaleza diferencial. Es decir, la medida fluctúa a ambos lados de un voltaje de equilibrio (normalmente 0 voltios).

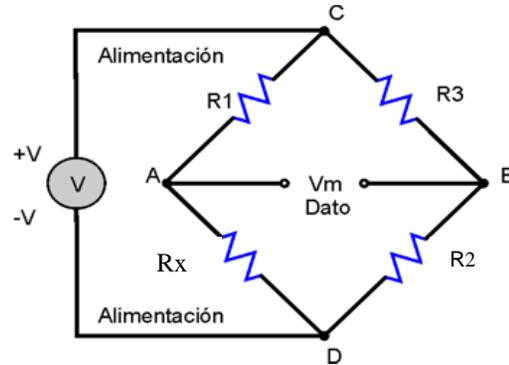


figura 1: puente de Wheatstone

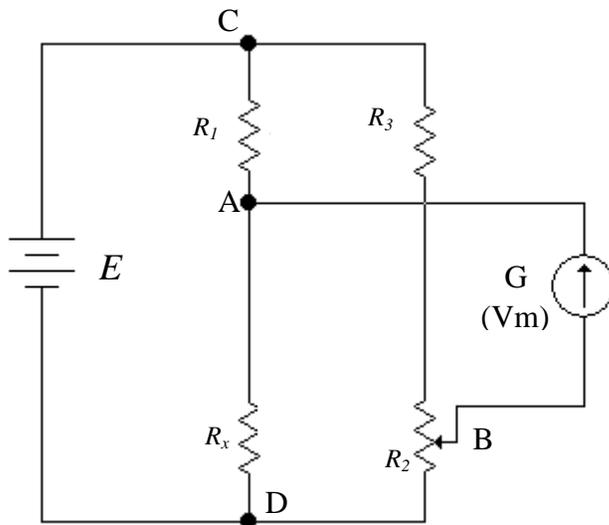


figura 2: puente de Wheatstone, determinación de  $R_x$

Las resistencias  $R_1$  y  $R_3$  de la figura 2, son resistencias de precisión,  $R_2$  es una resistencia variable calibrada,  $R_x$  es la resistencia bajo medición y  $G$  es un galvanómetro (mostrado en la figura 5) de gran sensibilidad. Si variamos  $R_2$  hasta que el galvanómetro indique cero corriente, habremos obtenido equilibrio en el puente, entonces:

$$V_{AD} = V_{BD} \quad (1) \quad (\text{no hay corriente en } G)$$

Donde:

$$V_{AD} = \frac{R_x}{(R_x + R_1)} \times E \quad (2)$$

$$V_{BD} = \frac{R_2}{(R_2 + R_3)} \times E \quad (3)$$

Por lo tanto:

$$\frac{R_x}{(R_x + R_1)} = \frac{R_2}{(R_2 + R_3)} \quad (4)$$

De (4) se obtiene:  $\frac{R_x}{R_1} = \frac{R_2}{R_3}$  ecuación de equilibrio, luego:  $R_x = \frac{R_1 \times R_2}{R_3}$  (5), en laboratorio se usará una resistencia de hilo, misma que reemplazará a las resistencias  $R_3$  y  $R_2$ . Expresando en función de la longitud.

Se tendría:

$$R_2 = R_{BD} = \rho \frac{l_{BD}}{A} \quad (6)$$

$$R_3 = R_{CB} = \rho \frac{l_{CB}}{A} \quad (7)$$

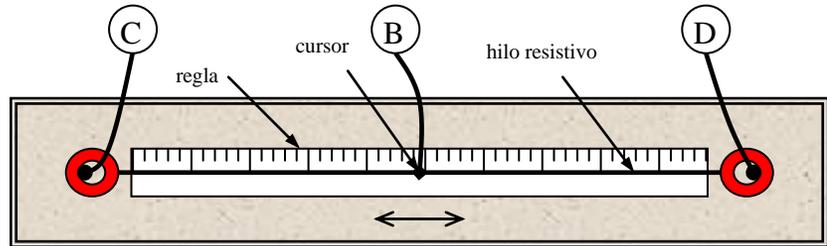


figura 3: vista de planta de la resistencia de hilo que reemplazará a  $R_2$  y  $R_3$

$l_{CB}, l_{BD}$  son las longitudes del hilo entre C-B y B-D, (fig. 3) respectivamente. Al reemplazar (6) y (7) en (5) queda:

$$R_x = R_1 \times \frac{l_{BD}}{l_{CB}} \quad (8)$$



figura 4: caja o década de resistencias " $R_1$ "

Por resistencia variable calibrada " $R_1$ " se empleará una década o caja de resistencias representada en la figura 4, el valor de la misma se puede regular con las manijas.

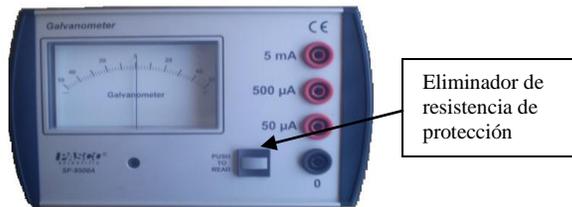


figura 5: galvanómetro "G"

El galvanómetro DC es prácticamente un amperímetro de alta sensibilidad en la medida de fluctuaciones de pequeñas corrientes continuas, además su indicador se encuentra al medio cuando la corriente es nula y por ello no tiene polaridad. Para autoprotección de corrientes mayores, dispone de su propia resistencia de protección, la cual se elimina con un pulsador (mientras se presiona) como se indica en la figura 5.

**FACTORES DE LOS QUE DEPENDE LA EXACTITUD DEL PUENTE:** La exactitud y precisión con la que determinemos el valor de  $R_x$  de una resistencia con un puente de Wheatstone dependen de los siguientes factores:

1. De la exactitud y precisión de las otras tres resistencias que constituyen el puente. Si  $R_x$  está dada por la expresión:

$$R_x = R_1 \frac{R_2}{R_3} = R_1 \frac{l_{BD}}{l_{CB}} \quad (9)$$

El error relativo de  $R_x$  en función de los errores relativos de las resistencias está dado por la expresión:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta l_{BD}}{l_{BD}} + \frac{\Delta l_{CB}}{l_{CB}} \quad (10)$$

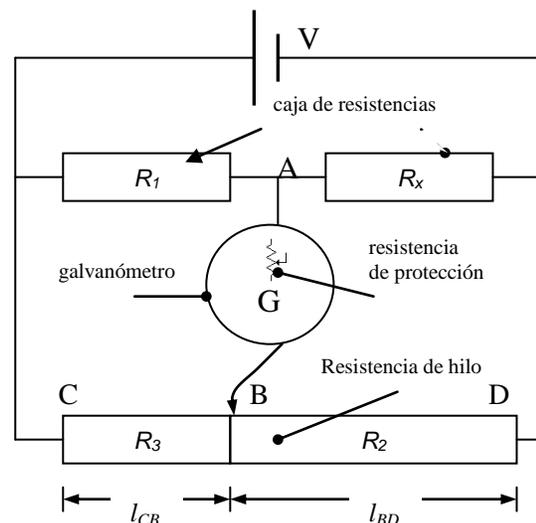


figura 6: configuración puente de Wheatstone para el experimento

Una forma de medir con precisión los valores de resistencia de  $R_2$  y  $R_3$  es mediante el uso de una resistencia de hilo como se muestra en la figura 3, ésta se constituye de un cable resistividad “ $\rho$ ” de sección constante “ $A$ ” y con longitud regulable mediante un cursor. Así por ejemplo,  $l_{CB}$  es la distancia entre C y B de la figura.2.- De los valores de las resistencias de precisión  $R_3$  y  $R_2$ . Cuanto menores sean los valores nominales de dichas resistencias, mayores serán las corrientes en el circuito, y será más simple detectar variaciones de las mismas.

3.- Del valor de la fuente  $E$ . Cuanto mayor sea dicho valor, mayores serán las corrientes en el circuito, por lo que será más simple detectar variaciones en sus valores. Debido a las condiciones impuestas sobre la batería y las resistencias, se tienen que realizar los diseños tomando en cuenta las limitaciones de potencia de estas últimas.

4.- De la sensibilidad del galvanómetro. Cuanto mayor sea dicha sensibilidad se podrá apreciar mejor la corriente  $i_G$ , y por lo tanto se podrán ajustar las resistencias con más precisión para que la corriente sea cero.

5.- De la proximidad de la resistencia  $R_x$  con  $R_1$ . De la ecuación (10) se tiene:

$$\Delta R_x = \bar{R}_x \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta l_{BD}}{l_{BD}} + \frac{\Delta l_{CB}}{l_{CB}} \right) \quad (11) \text{ pero si el hilo mide 1 [m], en el S.I. } \bar{l}_{CB} = 1 - \bar{l}_{BD} \quad (12) \text{ y } \Delta l_{CB} = \Delta l_{BD}$$

$$(13), \text{ Reemplazando (12) y (13) en (11) da: } \Delta R_x = \bar{R}_x \left( \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta l_{BD}}{l_{BD}} + \frac{\Delta l_{BD}}{(1 - \bar{l}_{BD})} \right) \quad (14), \text{ suponiendo } \Delta R_2 = 0$$

además a  $\Delta l_{BD}$  y  $\bar{R}_x$  como constantes, derivamos la ecuación (14) respecto a  $\bar{l}_{BD}$  y se obtiene:

$$\frac{d(\Delta R_x)}{d(\bar{l}_{BD})} = \bar{R}_x \cdot \Delta l_{BD} \cdot \left( -\frac{1}{(\bar{l}_{BD})^2} + \frac{1}{(1 - \bar{l}_{BD})^2} \right) \quad (15), \text{ Igualando la ecuación (15) a cero, obtenemos el valor de}$$

$\bar{l}_{BD}$  que da el **mínimo** valor de  $\Delta R_2: 1 - \bar{l}_{BD} = \bar{l}_{BD} \rightarrow \bar{l}_{BD} = 0,5 \text{ [m]} \rightarrow \bar{l}_{CB} = 0,5 \text{ [m]}$ . Consecuentemente deben

emplearse relaciones:  $\frac{l_{BD}}{l_{CB}} \approx 1$ , de manera que si:  $R_x \approx R_1$  **(16)** se obtiene la mejor resolución en la medida de  $R_x$

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

En el presente experimento se obtendrá solo un valor para cada resistencia desconocida, consecuentemente no se aplicará hipótesis estadística.

### 1.4 OBJETIVOS

- Determinar por el método del puente de Wheatstone el valor de tres resistencias desconocidas.
- Determinar por el método del puente de Wheatstone el valor de resistencias en serie y paralelo.
- Comparar la resolución de la medida de la resistencia en función de  $\frac{R_x}{R_1}$ .
- Observar la variación de la resistencia en función de la longitud del hilo.

### 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

#### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Resistencia de hilo de 1[m] de longitud (regla incluida)
- Caja o década de resistencias
- Tablero de resistencias
- Galvanómetro con resistencia de protección
- Fuente de voltaje *fem* DC

- Cables de conexión
- Multímetro
- Tornillo micrométrico (medida de la sección de la resistencia de hilos)

### 1.5.2 PROCEDIMIENTO PREVIO Y MEDIDA DE LAS CONSTANTES

- 1 Escoger tres resistencias cementadas o de carbón en buen estado.
- 2 Medir el valor de las resistencias escogidas  $R_x^*$  con un ohmiómetro.
- 3 Calcular el valor de la resistencia haciendo uso del código de colores. (Resistencia Nominal  $R_n$ ).
- 4 El valor de E debe ser lo más grande posible, tomando en cuenta que las resistencias pueden disipar como máximo  $\frac{1}{2}$  [W] y la década  $R_I$  hasta  $\frac{1}{4}$  [W]. Como peor caso, podemos considerar la conexión directa de la resistencia de 10 [ $\Omega$ ] a la fuente E. Para que dicha resistencia disipe menos de  $\frac{1}{2}$  [W] en estas condiciones, la fuente no debe superar los 2,24 [V]. En condiciones normales de operación, el voltaje aplicado a dicha resistencia será una fracción del voltaje de la fuente, y por lo tanto su disipación de potencia será mucho menor. Ajuste entonces la fuente de alimentación E regulable a 2,2 [V] controlando la salida con un voltímetro.
- 5 Medir con ohmiómetro el valor de la resistencia de hilo (de extremo a extremo). Así como el diámetro del hilo para posterior cálculo de su resistividad.
- 6 Verificar correcto funcionamiento de la resistencia de protección del galvanómetro, midiendo con un ohmiómetro entre sus terminales mientras se presiona y libera el pulsador eliminador de resistencia de protección.
- 7 Emplee inicialmente la escala más grande del galvanómetro (5 mA del laboratorio) pues así hará uso de la resistencia de protección más grande. Luego de conseguir que la corriente se haga cero (con la caja de resistencias) proceda a cambiar la escala a una más fina (500  $\mu$ A del laboratorio) con resistencia de protección más pequeña. A fin de evitar dañar el galvanómetro, no se empleará la escala más fina, pues al ser tan sensible es muy fácil dañar el aparato.
- 8 Otros galvanómetros cuentan con dos resistencias, una pequeña y otra extra de protección, la cual se elimina presionando un botón.

### 1.5.3 MEDIDA DE LAS VARIABLES

#### DETERMINACIÓN PARA TRES $R_x$

- 1 Conectar con una de las resistencias escogidas el circuito mostrado en la figura 6.
- 2 Para protección de la caja de resistencias, colocar ésta a su valor máximo (999999[ $\Omega$ ]).
- 3 Conectar en la resistencia de hilo el cursor por ejemplo para  $l_{BD} = l_{CB} = 0,5$  [m] o  $l_{BD}/l_{CB} = 1$ .
- 4 Encienda la fuente con autorización del docente o ayudante.
- 5 Proceda a equilibrar el puente, rebajando el valor de la resistencia de la caja, empiece con la escala X 100K $\Omega$ , luego la escala X 10 K $\Omega$  y así sucesivamente hasta que el galvanómetro marque cero. Debe hacer ésto mientras presiona con mucho cuidado el pulsador que elimina la resistencia de protección y en la escala mayor del galvanómetro. Una vez conseguido el equilibrio, (lectura del galvanómetro igual a cero), proceda entonces a cambiar la escala del galvanómetro a una más fina y proceda a regular nuevamente la caja de resistencias hasta conseguir el equilibrio final.

NOTA: Cuando note que la corriente en el galvanómetro tienda a aumentar peligrosamente para el aparato, libere (dejar de presionar) inmediatamente el pulsador que elimina la resistencia de protección.

- 6 Una vez conseguido el equilibrio, anote el valor de  $R_1$  obtenido.
- 7 Repita el procedimiento para otras tres resistencias.

#### DETERMINACIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE Y PARALELO

Conecte en serie las tres resistencias escogidas en el procedimiento anterior, repita el procedimiento realizado para hallar  $R_x$ , luego conecte las tres resistencias en paralelo para repetir el proceso.

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 CÁLCULO PARA ENCONTRAR $R_x$

- Determine el valor de  $R_x$  para cada una de las tres resistencias escogidas haciendo uso de la ecuación (8).
- Coloque en una tabla comparativa los valores obtenidos de  $R_x^*$  (con ohmiómetro),  $R_x$  (con el puente) y la obtenida con el (código de colores) si dispone de esa información.

### 2.2 MEDIDA DE RESISTENCIAS EN SERIE Y PARALELO

- Con los datos obtenidos con las resistencias conectadas en serie y paralelo, repita el procedimiento anterior.
- Debe verificarse que:  
Resistencias en serie:  $R_{eq} = \sum R_i$       Resistencias en paralelo:  $R_{eq}^{-1} = \sum (R_i)^{-1}$
- Coloque en una tabla comparativa los valores obtenidos de  $R_{eq}$  (con ohmiómetro),  $R_{eq}$  (con el puente) y la obtenida con el (código de colores) si dispone de esa información.

### 2.3 RESOLUCIÓN DE LA MEDIDA

- Determine de las tablas comparativas, qué valor de resistencia obtenida experimentalmente presenta menos diferencia porcentual del valor real.
- Verifique si la resistencia con menor error o diferencia porcentual con respecto a la real se aproxima más al valor de la resistencia  $R_1$  de la caja de resistencias según muestra la ecuación 16.

### 2.5 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

1. ¿Usted cree que en ausencia de galvanómetro se podría emplear un voltímetro?. ¿qué condiciones debería cumplir dicho voltímetro?
2. Explique, ¿por qué es conveniente que la aguja indicadora del galvanómetro esté al medio del visor cuando la corriente es cero?, ¿de qué depende para que el galvanómetro muestre que su aguja indicadora se oriente hacia la izquierda o hacia su derecha?
3. Indique que idealizaciones se asumieron en el experimento. ¿Considera que la resistencia se mantuvo constante mientras se obtenían lecturas?
4. ¿Considera que el valor en Ohmios de la resistencia de hilo es adecuada para el experimento?, justifique
5. ¿Qué ventajas se obtienen en el experimento debido al uso de una resistencia de hilo, en vez de emplear resistencias de carbón o un reóstato?
6. Calcule la resistividad  $\rho$  de la resistencia de hilo, ¿a qué material corresponde?
7. ¿Por qué se recomienda iniciar con la caja de resistencias con su máximo valor?
8. ¿Influye la variación de la resistencia en Ohmios de la resistencia de hilo debido a la variación de temperatura en el resultado del experimento?
9. Explique que entiende por resolución de la medida.
10. Como el puente de Wheatstone también es empleado en sistemas de control para convertir variaciones de resistencia a variaciones de voltaje, menciones algunos sensores cuya resistencia varía con alguna magnitud física.

## PUENTE DE WHEATSTONE

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

### MEDIDA DE RESISTENCIAS

*Resistencia de hilo:*

*Sección "A" de la resistencia de hilo:*

<i>Resistencia</i>	<i>R<sub>x</sub>(1)</i>	<i>R<sub>x</sub>(2)</i>	<i>R<sub>x</sub>(3)</i>
<i>R<sub>2</sub> (caja de resistencias)</i>			
<i>l<sub>BD</sub> / l<sub>CB</sub></i>			
<i>Resistencia según puente (medida indirecta)</i>			
<i>Lectura ohmiómetro</i>			
<i>Lectura código de colores</i>			

### MEDIDA DE RESISTENCIAS EN SERIE Y PARALELO

<i>Resistencia</i>	<i>R<sub>x</sub>(SERIE)</i>	<i>R<sub>x</sub>(PARALELO)</i>
<i>R<sub>2</sub> (caja de resistencias)</i>		
<i>l<sub>BD</sub> / l<sub>CB</sub></i>		
<i>Resistencia según puente (medida indirecta)</i>		
<i>Lectura ohmiómetro</i>		

*R(medida con el ohmiómetro) al iniciar el experimento:*

*R(medida con el ohmiómetro) al finaliza el experimento:*

# LEYES DE KIRCHHOFF

## 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Las redes eléctricas en las cuales los componentes no forman agrupaciones sencillas, no pueden resolverse en general por el método de la resistencia equivalente. En respuesta a este problema, el físico alemán Gustavo Roberto Kirchhoff (1824-1887) enunció por primera vez dos reglas que permiten resolver tales circuitos sistemáticamente. Una red eléctrica consiste, en general, en un circuito complejo en cual figuran resistencias, motores, condensadores y otros elementos. Aquí sólo se consideran redes con resistencias óhmicas y fuerzas electromotrices (voltajes o tensiones).

Estas leyes no representan ninguna idea nueva para los principios de la física, vistos hasta ahora. Son consecuencia de dos leyes fundamentales: la conservación de la carga eléctrica y la conservación de la energía. La primera establece que la suma algebraica de las corrientes (carga por unidad de tiempo) que pasan por un nodo es cero. Esto significa que ningún nodo guarda, destruye, o crea carga, así que la primera ley de Kirchhoff es una manifestación de esta propiedad. La segunda ley afirma que la suma algebraica de los voltajes alrededor de un lazo cerrado es cero. Esto significa que la energía que entrega la batería es usada en su totalidad por el circuito. La batería, o cualquiera de los elementos de circuito, no crean, ni destruyen energía, sólo la transforman. A final de cuentas, la energía se degrada en calor y se disipa en el ambiente.

### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

Antes de enunciar estas leyes se deben dar algunas definiciones importantes:

- Rama: Es la parte de la red donde circula una corriente de la misma intensidad.
- Nodo: Es un punto de la red donde concurren tres o más conductores o ramas.
- Malla: Es cualquier trayectoria cerrada.

LEY DE CORRIENTES DE KIRCHHOFF (Ley de Nodos):

La suma de las corrientes que llegan a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen de él:

$$i(\text{llegan}) = i(\text{salen})$$

Si se consideran como positivas las corrientes que llegan a un nodo y como negativas las corrientes que salen, la ley de los nodos también puede expresarse en la forma siguiente:

En un nodo la suma algebraica de las intensidades de la corriente es igual a cero.  $\sum i = 0$  en un nodo cualquiera.



$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

n: número de ramas que se unen al nodo

$i_k$ : corriente de la rama k-ésima

figura 1: aplicación de la ley de nodos

LEY DE TENSIONES DE KIRCHHOFF (Ley de las mallas):

Al recorrer una malla la suma algebraica de las fuerzas electromotrices ( $\xi$ ) y las diferencias de potencial ( $i \times R$ ) en las resistencias es cero:  $V_{ab} = 0$  en cualquier malla de la red.

Para aplicar correctamente la ley de Tensiones de Kirchhoff, se recomienda asumir primero un sentido de recorrer la malla. Una vez hecho esto se asigna signos positivos a todas las tensiones de aquellas ramas donde se entre por el terminal positivo en el recorrido de la malla y se asigna signos negativos cuando entre por el terminal negativo de la rama.

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0$$

n: número de ramas que compone la malla  
 $V_k$ : tensión en la rama k ésima

Luego de haber asignado las referencias de tensión a las diferentes ramas del circuito de la figura 2, la ley de tensiones aplicada a la malla exterior mostrada con la flecha gruesa, queda:

$$-V_1 + V_4 + V_6 + V_5 = 0$$

Para plantear la ecuación se ha seguido la siguiente regla:

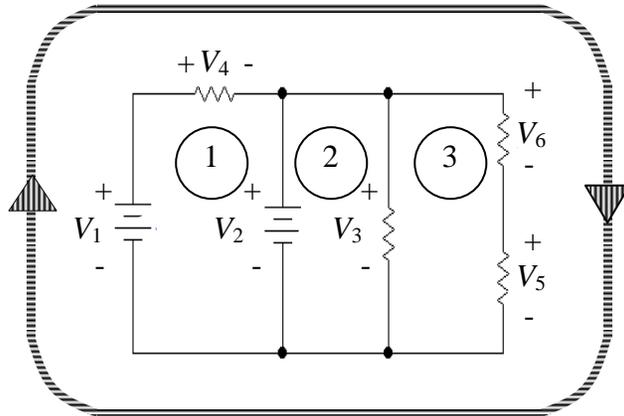


figura 2: aplicación de la ley de mallas

Siguiendo el sentido del bucle externo mostrado en la figura 2, la tensión se escribe con signo positivo si nos encontramos el + antes que - ( $V_4, V_6$  y  $V_5$ ), y con signo negativo si encontramos el - antes que el + ( $V_1$ ). Como el circuito de la figura 2 tiene tres mallas, entonces el número máximo de ecuaciones que se pueden plantear para éste son tres.

Para validar las dos Leyes de Kirchhoff, se recurrirán a dos circuitos simples como se muestran en las figuras 3 y 4 que se emplearán para comprobar la primera y segunda Ley respectivamente.

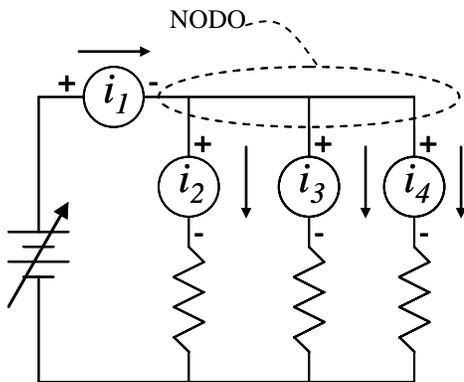


figura 3: verificación de la Ley de Nodos

La figura 3, muestra un sencillo circuito en el cual puede aplicarse la Ley de Nodos de Kirchhoff. La figura muestra el nodo en el cual concurren cuatro ramas;  $i_1$  entrante,  $i_2, i_3$ , e  $i_4$  salientes leídos por los amperímetros, de modo que:

$$+i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0$$

Por tanto debe validarse que:

$$i_1 = i_2 + i_3 + i_4 \quad (1)$$

El nodo inferior es redundante, consecuentemente no se lo toma en cuenta.

La figura 4, muestra un sencillo circuito en el cual puede aplicarse la Ley de Mallas de Kirchhoff. La figura muestra la malla con una *fem* y tres resistencias, cuyas lecturas con el voltímetro son:  $V_1, V_2, V_3$  y  $V_4$  respectivamente, de modo que:

$$-V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$$

Por tanto debe validarse que:

$$V_1 = V_2 + V_3 + V_4 \quad (2)$$

No debe olvidarse la polaridad de los instrumentos de medida.

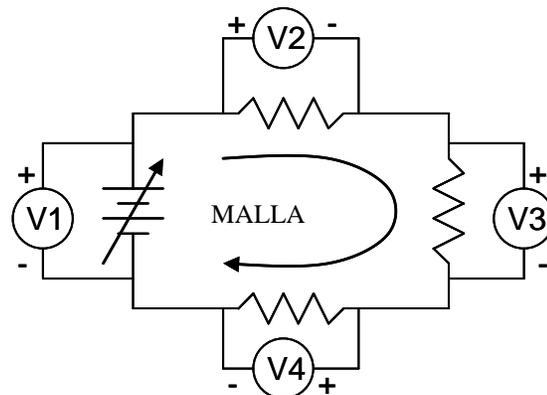


figura 4: verificación de la Ley de Mallas

Para la formulación de la hipótesis, planteamos las siguientes ecuaciones:

$$\text{Ley de Nodos: } K_1 = \frac{i_2 + i_3 + i_4}{i_1} \quad (3) \quad \text{Ley de Mallas: } K_2 = \frac{V_2 + V_3 + V_4}{V_1} \quad (4)$$

MÁXIMO VOLTAJE APLICADO AL CIRCUITO DE LA FIGURA 3:

A fin de evitar que la potencia disipada por las resistencias, exceda su límite de calentamiento, debe calcularse el voltaje máximo a suministrarse en las mismas.

Aplicando la Ley de Mallas en el circuito de la figura 3 y despreciando las resistencias internas de los instrumentos, se tiene que el voltaje aplicado a cada una de las resistencias es el mismo que el generado por la fuente

$\xi = V_R = V_{\max}$ , entonces la potencia disipada por cada resistencia está dada por la Ley de Joule:  $P_{\max} = \frac{V_{\max}^2}{R_{\min}}$ , es

decir:  $V_{\max} = \sqrt{P_{\max} \times R_{\min}}$  (5), donde  $P_{\max}$  es la máxima potencia que puede disipar la resistencia y  $R_{\min}$  la resistencia escogida de menor valor.

MÁXIMO VOLTAJE APLICADO AL CIRCUITO DE LA FIGURA 4:

Aplicando nuevamente la Ley de Mallas en el circuito de la figura 4 y despreciando las resistencias internas de los

instrumentos, se tiene que:  $\xi = V_{\max} = i \times R_1 + i \times R_2 + i \times R_3$ , es decir:  $i = \frac{V_{\max}}{R_1 + R_2 + R_3}$ , entonces la

potencia máxima disipada en cada resistencia es:  $P_{\max} = R_{\max} \times i^2 = R_{\max} \times \left( \frac{V_{\max}}{R_1 + R_2 + R_3} \right)^2$ , es decir:

$V_{\max} = (R_1 + R_2 + R_3) \times \sqrt{\frac{P_{\max}}{R_{\max}}}$  (6), donde  $R_{\max}$  es la máxima entre  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ ,  $P_{\max}$  es la máxima potencia que

pueden disipar las resistencias seleccionadas.

### 1.3 FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS

LEY DE NODOS:

Hipótesis nula  $H_0$ :  $K_1 = 1$

Hipótesis alternativa  $H_1$ :  $K_1 \neq 1$  Bilateral o de dos colas

Al emplear la prueba  $t$  de Student, para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t_{\text{calculado}} < t_{\text{de tablas}}$ .

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la Ley de Nodos no es válida o el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas y 99 % nivel de confianza).

LEY DE MALLAS:

Hipótesis nula  $H_0$ :  $K_2 = 1$

Hipótesis alternativa  $H_1$ :  $K_2 \neq 1$  Bilateral o de dos colas

Al emplear la prueba  $t$  de Student, para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t_{\text{calculado}} < t_{\text{de tablas}}$ .

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la Ley de Mallas no es válida o el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas y 99% nivel de confianza).

## 1.4 OBJETIVOS

- Validar la Ley de Nudos.
- Validar la Ley de Mallas.

## 1.5 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

### 1.5.1 MATERIAL Y EQUIPO

- Tablero de resistencias
- Amperímetro (deseable 4 unidades)
- Voltímetro
- Fuente de voltaje  $fem$  regulable (si la fuente no es regulable, usar circuito con reóstato para variar el voltaje)
- Cables de conexión
- Multímetro

### 1.5.2 LEY DE NUDOS

- 1 Escoger tres resistencias cementadas o de carbón en buen estado (verificar con ohmiómetro).
- 2 Registrar el valor de la resistencia (Ohmios) de menor valor.
- 3 Armar el circuito de la figura 3. (Si no se dispondría de 4 amperímetros, debe rotar la posición del disponible en las posiciones mostradas en la figura y conectar un voltímetro en la fuente).
- 4 En caso de contar con un solo amperímetro, solicite aprobación al docente o ayudante cada vez que realice cambio de posición de este instrumento.
- 5 Regular la salida de la fuente en el valor mínimo y consultar al docente o ayudante para encender.
- 6 Debe obtener lecturas de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ , e  $i_4$  para un mismo valor de  $\xi$ , mismo que debe incrementarse de cero a un valor  $V_{max}$  calculado con la ecuación (5).
- 7 Para cada valor de  $\xi$  obtenido con la fuente y registrado por un voltímetro deben registrarse lecturas de:  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ , e  $i_4$ . Desde ya, puede constatar que:  $i_1 = i_2 + i_3 + i_4$ .

Nota: El uso de un voltímetro para medir el voltaje de  $\xi$  sólo es necesario si se dispone de un solo amperímetro, ya que éste debe rotarse en cada rama para medir la corriente para cada valor de voltaje de la fuente leído por dicho voltímetro.

### 1.5.3 LEY DE MALLAS

1. Escoger tres resistencias cementadas o de carbón en buen estado (verificar con ohmiómetro).
2. Registrar el valor de la resistencia (Ohmios) de mayor valor.
3. Armar el circuito de la figura 4. (Como la medición con voltímetro es más sencilla, será suficiente contar con un solo voltímetro para conectar a su turno a cada una de las resistencias).
4. Regular la salida de la fuente en el valor mínimo y consultar al docente o ayudante para encender
5. Debe obtener lecturas de  $V_1, V_2, V_3$ , y  $V_4$  para un mismo valor de  $\xi$ , mismo que debe incrementarse de cero a un valor  $V_{max}$  calculado con la ecuación (6).
6. Para cada valor de  $\xi$  obtenido con la fuente y registrado por un voltímetro deben registrarse lecturas de:  $V_1, V_2, V_3$ , y  $V_4$ . Desde ya, puede constatar que:  $V_1 = V_2 + V_3 + V_4$

## 2 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

### 2.1 LEY DE NODOS

#### 2.1.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

- Represente en un gráfico la relación:  $i_1$  vs  $(i_2+i_3+i_4)$ , obtenidos con el amperímetro para diferentes  $fem$  aplicadas.
- En el mismo gráfico, representar la línea con intersección en el origen y pendiente la unidad que corresponde al planteamiento teórico.
- Aplicar regresión lineal en la forma:  $y = a + b \cdot x$  ó  $i_1 = K_1 \times (i_2 + i_3 + i_4)$ , con  $n$  medidas, si llamamos:  $S_1 = i_2 + i_3 + i_4$ , tenemos:

$$i = \frac{\sum S_{1i}^2 \sum i_{1i} - \sum S_{1i} \sum i_{1i} S_{1i}}{n \sum S_{1i}^2 - (\sum S_{1i})^2} + \frac{n \sum S_{1i} i_{1i} - \sum S_{1i} \sum i_{1i}}{n \sum S_{1i}^2 - (\sum S_{1i})^2} \times S_1 \quad (7)$$

- El primer término de la ecuación (7) debe ser cero y el segundo igual a la unidad.

## 2.1.2 VALIDACIÓN DE LA LEY DE NODOS

ERROR DE LA ESTIMACIÓN ( $a$  y  $b$ ):

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|a-0|}{s_a}$ ,

$$\text{donde: } s_a = s_{i/S_1} \times \sqrt{\frac{\sum S_{1i}^2}{n \sum S_{1i}^2 - (\sum S_{1i})^2}}; \quad s_{i/S_1} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot S_{1i}) - i_{1i}]^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|b_{exp} - b_{teo}|}{s_b} = \frac{|S_1 - 1|}{s_{S_1}}$ , donde:

$$s_{S_1} = \frac{s_{i/S_1}}{\sqrt{\sum S_{1i}^2 - \frac{1}{n} (\sum S_{1i})^2}}, \quad s_{i/S_1} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum [(a + b \cdot S_{1i}) - i_{1i}]^2}{n-2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas:  $t$  de tablas:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t$  calculado  $<$   $t$  de tablas.

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la Ley de Nodos no ha sido validada porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas).

## 2.2 LEY DE MALLAS

### 2.2.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

- Represente en un gráfico la relación:  $V_1$  vs  $(V_2+V_3+V_4)$ , obtenidos con el voltímetro para diferentes  $fem$  aplicadas.
- En el mismo gráfico, representar la línea con intersección en el origen y pendiente la unidad que corresponde al planteamiento teórico.
- Aplicar regresión lineal en la forma:  $y = a + b \cdot x$  ó  $V_1 = K_2 \times (V_2 + V_3 + V_4)$ , con  $n$  medidas, si llamamos:  $S_2 = V_2 + V_3 + V_4$ , tenemos:

$$i = \frac{\sum S_{2i}^2 \sum V_{1i} - \sum S_{2i} \sum V_{1i} S_{2i}}{n \sum S_{2i}^2 - (\sum S_{2i})^2} + \frac{n \sum S_{2i} V_{1i} - \sum S_{2i} \sum V_{1i}}{n \sum S_{2i}^2 - (\sum S_{2i})^2} \times S_2 \quad (8)$$

- El primer término de la ecuación (8) debe ser cero y el segundo igual a la unidad.

### 2.2.2 VALIDACIÓN DE LA LEY DE NODOS

ERROR DE LA ESTIMACIÓN ( $a$  y  $b$ ):

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|a-0|}{s_a}$ ,

$$\text{donde: } s_a = s_{v1/s2} \times \sqrt{\frac{\sum S_{2i}^2}{n \sum S_{2i}^2 - (\sum S_{2i})^2}} ; \quad s_{v1/s2} = \sqrt{\frac{\sum [(a+b \cdot S_{2i}) - V_{1i}]^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

Se empleará el estadístico de Student  $t_{calc.} = \frac{|b_{exp} - b_{teo}|}{s_b} = \frac{|S_2 - 1|}{s_{S2}}$ , donde:

$$s_{S2} = \frac{s_{v1/s2}}{\sqrt{\sum S_{2i}^2 - \frac{1}{n}(\sum S_{2i})^2}} , \quad s_{v1/s2} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum [(a+b \cdot S_{2i}) - V_{1i}]^2}{n-2}}$$

Como el análisis es de dos colas, se busca en tablas:  $t$  de tablas:  $t_{\alpha/2, n-2}$

Para no rechazar  $H_0$ , debe cumplirse:  $t$  calculado  $<$   $t$  de tablas.

De lo contrario se rechaza  $H_0$ , es decir la Ley de Mallas no ha sido validada porque el procedimiento presentó error sistemático. Se sugiere emplear una significancia  $\alpha/2 = 0,005$  ( $t_{\alpha/2}$  dos colas).

### 2.3 DISCUSIÓN DEL EXPERIMENTO

1. En caso de no contarse con una fuente regulable, debe emplearse un circuito basado en un reóstato para obtener un suministro de voltaje regulable. Dibuje el esquema eléctrico de dicho circuito.
2. Defina en sus palabras, qué entiende por malla.
3. Haga uso de las Leyes de Kirchhoff para deducir el valor de las resistencias equivalentes en circuitos de resistencia en serie y paralelo.
4. Haciendo uso de la Ley de Joule, calcule la potencia total disipada para cada uno de los circuitos, ¿cuál de los dos circuitos disipa mayor calor?
5. ¿Por qué cree que para la deducción de la ecuación (5) que se emplea para encontrar el voltaje máximo a aplicarse en el circuito de la figura 3, se basa en la resistencia mínima, mientras que para deducir la ecuación (6) del circuito de la figura 4, se emplea mas bien la resistencia máxima?
6. Explique cómo determina el número de ecuaciones linealmente independientes que se obtienen con las leyes de Kirchhoff para un determinado circuito?
7. ¿Influye el valor de las resistencias internas de los instrumentos de medida en los resultados obtenidos en laboratorio?
8. ¿Qué factores pueden generar errores sistemáticos en el experimento?
9. Si las tres resistencias escogidas tienen el mismo coeficiente  $\alpha$  (coeficiente de temperatura), ¿de qué modo influye un aumento de temperatura similar en las tres resistencias en el experimento?
10. ¿Serán válidas las Leyes de Kirchhoff en circuitos de corriente alterna que además contengan condensadores e inductancias?

## LEYES DE KIRCHHOFF

ESTUDIANTE:  
FECHA EXPERIMENTO:

GRUPO:  
VoBo:

### Ley de Nudos

Medidas directas:  
(seleccionar la mínima  $R$  para hallar  $V_{I_{max}}$ )

$R_1$ :

$R_2$ :

$R_3$ :

$P_n$  (potencia nominal de las resistencias):

Medidas indirectas

$V_{I_{max}}$ :

$n$								
$fem [V]$								
$i_1$								
$i_2$								
$i_3$								
$i_4$								

### Ley de Mallas

Medidas directas:  
(seleccionar la máxima  $R$  para hallar  $V_{I_{max}}$ )

$R_1$ :

$R_2$ :

$R_3$ :

Medidas indirectas

$V_{I_{max}}$ :

$n$								
$V_1$								
$V_2$								
$V_3$								
$V_4$								

## PRUEBAS DE ONDULACIÓN

### 1 PLANEAMIENTO DEL EXPERIMENTO

#### 1.1 INTRODUCCIÓN

En la figura 1 se muestra el tanque de ondulaciones, el mismo permite generar a través de un agitador (generador de ondulaciones), ondas mecánicas en el agua contenida. Los niveles de amplitud y frecuencia pueden ser fácilmente ajustados, y con la ayuda de un estroboscopio, un reflector y pantalla proyectora como se muestra en las figuras 7 y 8, puede visualizarse con claridad a la onda generada (figura 9). En la presente práctica se realizarán experiencias para determinar velocidades de propagación, demostraciones de interferencia, efecto Doppler, reflexión, refracción y difracción de ondas mecánicas. Por ello, el propósito de esta práctica, será simplemente de observación de fenómenos ondulatorios.

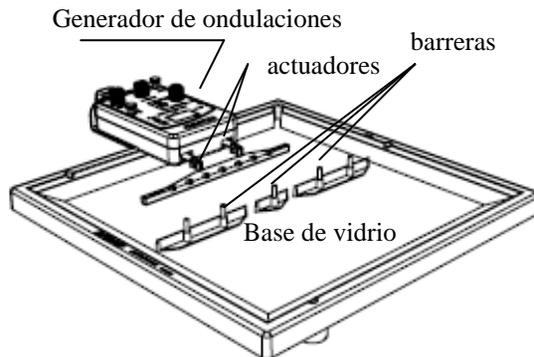


figura 1: tanque de ondulaciones

#### 1.2 FUNDAMENTO TEÓRICO:

El generador de ondulaciones, no es más que un agitador que actúa transversal o perpendicularmente a la superficie de agua mediante un relé similar a los empleados en parlantes de sonido. Al vibrar los dos actuadores generan ondulaciones en el agua contenida en el tanque. Como las partículas del agua se mueven con velocidad “ $u$ ” perpendicularmente al sentido de propagación de la ondulación que avanza con velocidad “ $v$ ” como se muestra en la figura 2, entonces la onda se llama transversal.

La propagación de una onda (onda viajera), puede representarse con la expresión:

$$y = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (1) \quad \text{Donde:}$$

“ $A$ ” representa la amplitud, “ $T$ ” el período y “ $\lambda$ ” longitud de onda.

Las dos variables son: “ $t$ ” y “ $x$ ”. Si hacemos  $t = 0$

$$\text{Queda: } y = A \cos \left( 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \quad (2)$$

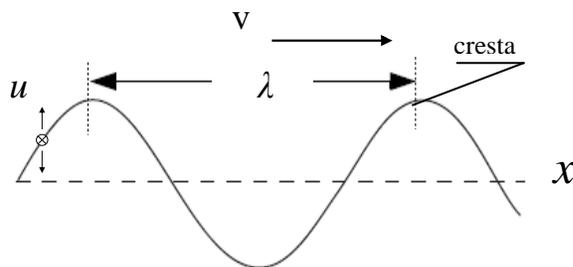


figura 2: onda representada por la

Experimentalmente se puede conseguir “detener a la onda” digase en  $t = 0$  tal como si se sacara una foto de ella, esto se consigue a través del uso de un estroboscopio. Un estroboscopio no es más que un foco que se enciende y apaga con una frecuencia regulable. Cuando dicha frecuencia coincide con la frecuencia del objeto en movimiento oscilatorio, entonces se consigue el efecto de “detener” a tal objeto. En los experimentos a realizarse en la presente práctica, se hará uso de luz estroboscópica para así poder visualizar a la onda como si ésta estuviera detenida.

##### 1.2.1 Velocidad de propagación de una onda viajera

La velocidad de propagación de una onda viajera se puede calcular con:  $v = \lambda \times f$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda o distancia entre crestas como se muestra en la figura 2:  $f$  es la frecuencia o inverso del período  $T$  que es el tiempo que toma que dos crestas consecutivas pasen por un punto en el recorrido de una onda. Sin embargo, la velocidad de propagación de una onda depende del medio elástico en el que se propaga, para el caso de que este

medio sea un fluido (en el experimento agua), la velocidad queda definida por:  $v = \sqrt{B/\rho}$ , donde  $B$  es el módulo de compresibilidad del fluido (agua) y  $\rho$  su densidad.

1.2.2 Interferencia de ondas

Cuando dos ondas de la misma frecuencia se encuentran en un mismo punto del espacio, entonces se tiene el fenómeno de interferencia. Si no hay desfase entre ambas, las amplitudes de las mismas se suman, esta interferencia es conocida como constructiva. En cambio si están desfasadas por  $\lambda/2$  entre sí, sus amplitudes se restan, es decir destructiva. En la figura 3, se muestra: Fase con líneas del mismo tipo,

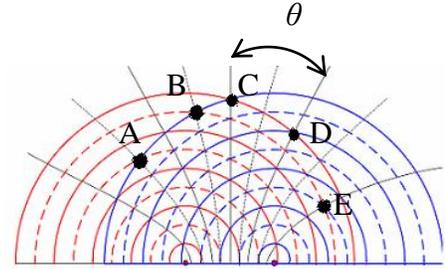


figura 3: Interferencia de ondas mecánicas

(continua o segmentada). Desfase cuando son distintas, por ejemplo en A y B se tienen interferencias destructivas, mientras que en C, D y E interferencias constructivas. El ángulo de difracción “ $\theta$ ” (ángulo entre regiones constructivas) se muestra en la figura 3, se cumple:  $d \sin \theta = m\lambda$ , donde “ $d$ ” es la distancia entre las dos fuentes o distancia entre ranuras (figura 16) y “ $m$ ” = 0,1,2,3,etc.

10.2.1 Efecto Doppler

Cuando la fuente de ondas y el observador están en movimiento relativo, la frecuencia de las ondas observadas es distinta a la frecuencia de las ondas emitidas. Los frentes de ondas que emite la fuente son esferas concéntricas, la separación entre las ondas es menor hacia el lado en el cual el emisor se está moviendo y mayor del lado opuesto. Para el observador, en reposo o en movimiento esto corresponde a una mayor o menor frecuencia.

1.2.4 Reflexión

Un rayo es una línea que indica la dirección del movimiento del plano de una onda. Cuando la onda refleja en una superficie, el ángulo de incidencia  $\phi_i$ , es aquel que se forma entre el rayo incidente y la normal (línea perpendicular a la superficie). El ángulo reflejado  $\phi_r$ , es aquel que se forma entre el rayo reflejado y la normal.

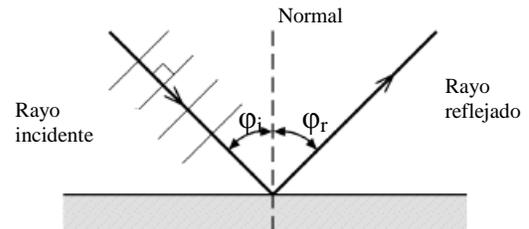


figura 4: Reflexión de una onda

1.2.5 Refracción

Cuando una onda viajera pasa de un medio a otro en el que la velocidad de la onda se hace diferente, la onda dobla en otra dirección. Si la onda reduce de velocidad, ésta doblará hacia la normal de la interfase entre un medio y el otro, tal como se muestra en la figura 4, nótese que la “ $\lambda$ ” se redujo en el medio 2. Este fenómeno es conocido como refracción.

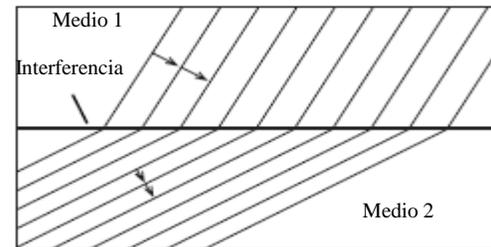


figura 5: Refracción de una onda

1.2.6 Difracción

Cuando el frente de una onda plana pasa por una restricción o apertura en una barrera, se genera un nuevo frente de onda circular. Si la apertura es relativamente mayor que la longitud de onda de la ondulación, entonces la onda difractada forma un frente de onda del tipo plana. Pero en cambio, si la restricción es relativamente menor que la longitud de onda, se obtendrá un frente de onda circular.

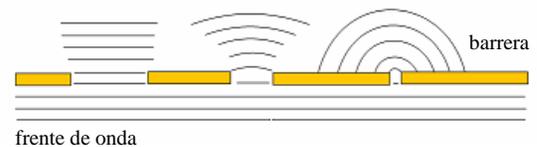


figura 6: Difracción de una onda

### 1.3 OBJETIVO:

- Visualizar una onda mecánica distinguiendo su longitud de onda y frecuencia para determinar su velocidad.
- Visualizar interferencia de ondas mecánicas
- Visualizar el efecto Doppler
- Visualizar la reflexión de ondas mecánicas
- Visualizar la refracción de ondas mecánicas
- Visualizar la difracción de ondas mecánicas

## 2. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

### 2.1 DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTAL

Para efectos de visualización, al tanque de ondulaciones de la figura 1, deben incorporarse la pantalla proyectora y reflector (figura 7) empleando las clavijas del marco del tanque (figura 8). Luego debe incorporarse la fuente de luz tal como se muestra en el arreglo final de la figura 9.

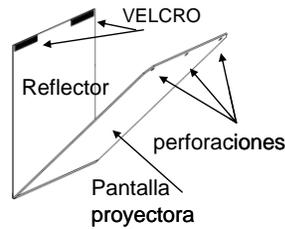


figura 7: reflector-pantalla proyectora

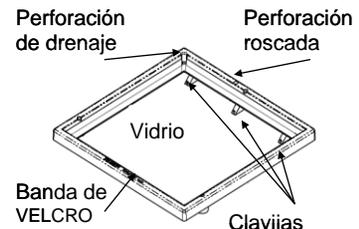


figura 8: marco del tanque de ondulaciones

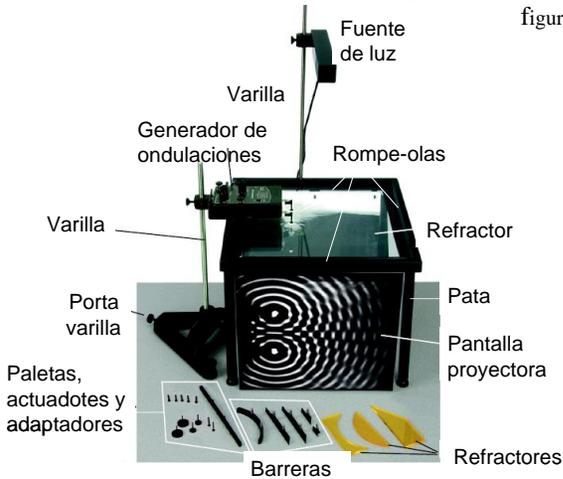


figura 9: Vista del sistema completo

El tanque de ondulaciones, incluye cuatro rompe-olas que al colocarse en los bordes del tanque, amortiguan el efecto de reflexión o rebote de las olas, las cuales producirían interferencia con la onda original y distorsionarla.

Una vez instalado el sistema como se muestra en la figura 9, debe colocarse el tanque en nivel. Esto puede conseguirse de dos maneras, la primera echando un poco de agua al medio del tanque y regular la altura de las patas para que se forme un círculo de unos 10 cm de diámetro en el centro sobre la base de vidrio, o en su defecto echar unos 800 ml de agua al tanque y medir la profundidad en las esquinas del tanque y regular la altura de las patas hasta conseguir que el tanque quede en nivel.

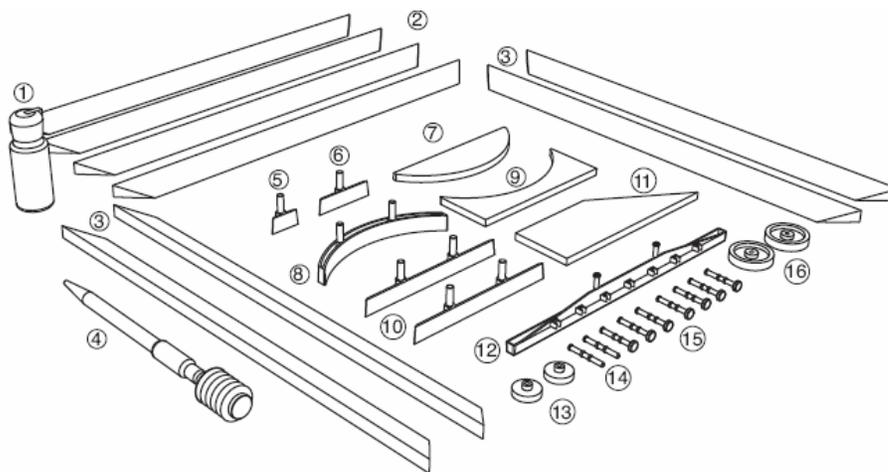


figura 10: Accesorios del tanque de ondulaciones

- 1 : surfactante
- 2 : esponjas rompe-olas
- 3 : esponjas rompe-olas
- 4 : gotero
- 5 : mini barrera difracción
- 6 : pequeña barrera difracción
- 7 : refractor convexo
- 8 : reflector curvo
- 9 : refractor cóncavo
- 10 : barrera grande difracción
- 11 : refractor trapezoidal
- 12 : paleta de onda plana
- 13 : actuadores pequeños
- 14 : paletas adaptadoras
- 15 : paletas estándar
- 16 : actuadores grandes

El generador de ondulaciones debe enchufarse al adaptador de 15 VDC mediante su toma de corriente. El emisor de luz deberá conectarse a su terminal de conexión. Se debe cuidar que el generador de ondulaciones no tenga contacto con la estructura del tanque, y para asegurar que las perillas de ajuste fino obtengan mejor regulación de nivel debe observarse de comienzo que el generador de ondulaciones esté paralelo a su soporte (figura 11). Luego de ello, con las perillas de ajuste debe ajustarse nivel con la paleta de onda plana (figura 11). Es importante que las paletas toquen muy levemente la superficie de agua en el tanque (figura 13).

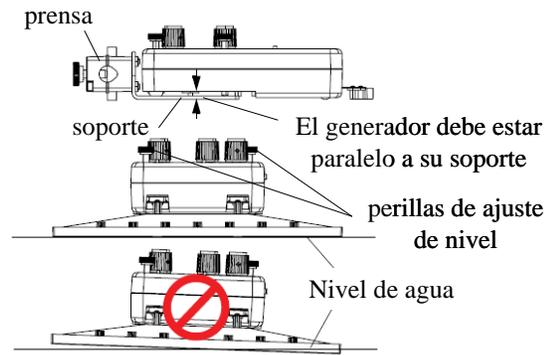


figura 11: Vista lateral del generador de ondulaciones

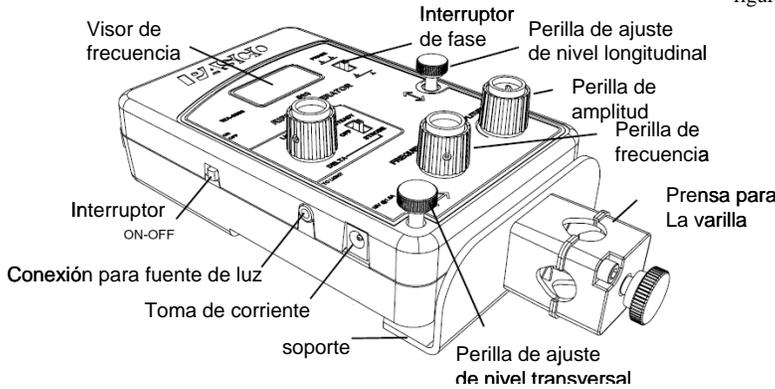


figura 12: Generador de ondulaciones

El generador de ondulaciones es el principal componente del sistema, pues se encarga de generar las perturbaciones ondulatorias con frecuencia y amplitud regulables a través de sus actuadores (figura 1).

Al estar la fuente de luz conectada al generador de ondulaciones, con el selector en "Strobe" se puede generar luz estroboscópica (misma frecuencia de los actuadores). En "Steady" se emite luz permanente.

Con el interruptor de fase (figura 12), puede conseguirse que entre los dos actuadores se presente desfase de  $0^\circ$  en un caso y de  $180^\circ$  en el otro, útil para realizar experimentos de interferencia. Con el mando de la fuente de luz DELTA (figura 14), se puede regular la frecuencia del emisor de luz independientemente de la frecuencia de agitación de los actuadores. Pero ésto es solo posible para operaciones de frecuencia mayores a los 5 Hz. Con el regulador DELTA, se pueden hacer incrementos en sentido horario y decrementos en sentido antihorario de 0,8 Hz por vez. El visor de frecuencia mostrará intermitentemente dicho valor.



figura 13: Contacto paleta - superficie del agua

Cuando la frecuencia de la luz es ligeramente diferente que la del actuador, la onda parece avanzar a velocidad constante.

El generador de funciones tiene una perilla para ajuste de amplitud de la ondulación producida. Para iniciar es recomendable empezar con amplitud mínima con la perilla ajustada en el extremo del sentido antihorario y, en el experimento subir poco a poco en sentido horario hasta poder visualizar claramente la onda producida.

La perilla para ajuste de frecuencia tiene un Visor que permite apreciar la frecuencia generada, la misma que puede ajustarse con resolución de 0,1 Hz, en el rango de 1,0 a 50,0 Hz. Al encendido la frecuencia generada por defecto es de 20,0 Hz

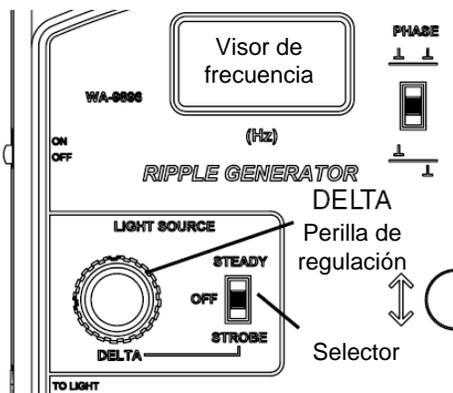


figura 14: Regulación del estroboscopio

## 2.2 DESCRIPCIÓN DE LOS PROCESOS

*Coloque una hoja de papel:* Una vez que tiene armado el sistema como se muestra en la figura 9, coloque una hoja de papel en una base horizontal debajo del tanque para poder dibujar con lápiz las proyecciones de las ondulaciones que se podrán visualizar sobre el papel.

*Coloque surfactante sobre los accesorios:* Antes de verter agua al interior del tanque, es aconsejable rociar con una gota de surfactante con el dedo en las esponjas rompe olas, barreras y refractores; para así evitar problemas con la tensión superficial en el agua.

*Coloque el tanque en nivel:* Haciendo uso de los pernos de ajuste de las tres patas del tanque, coloque el mismo en nivel horizontal.

*Empape las esponjas rompe olas:* Luego de llenar con aproximadamente 800 ml de agua el tanque, empape bien las esponjas con agua apretándolas con los dedos para asegurar que el líquido elemento penetre en el material esponjoso para reducir aun más los efectos de tensión superficial. Para drenar el agua en exceso o regular el nivel de acuerdo al experimento use la manguerita de drenaje ubicada en una de las esquinas del tanque o, emplee el gotero.

*Ajuste el nivel de paletas:* El generador de ondulaciones cuenta con dos perillas de ajuste, uno longitudinal y otro transversal para asegurar que el generador quede en nivel con el agua como se muestra en la figura 11.

### 2.2.1 VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE UNA ONDA VIAJERA

Con 4 cm de profundidad de agua, encienda el generador de ondulaciones, así como la fuente estroboscópica de luz en el modo STROBE.

Ajuste la frecuencia a 5 Hz y la amplitud en un valor ligeramente menor a la mitad del máximo. Regule la amplitud a objeto de obtener mejor apreciación de la onda.

Cuando en el papel colocado bajo del tanque se puedan ver las franjas oscuras (crestas de la onda), mida y registre cinco longitudes de onda.

Repita el procedimiento para otros dos valores de frecuencia, por ejemplo 10 y 15 Hz.

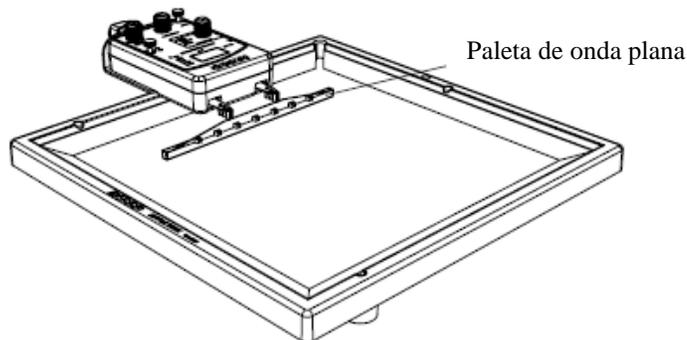


figura 15: Disposición del tanque

Repita el procedimiento para diferentes niveles de profundidad de agua, por ejemplo: 7 y 10 cm (ayúdese con el gotero). Calcule la velocidad para los nueve casos y concluya si la frecuencia de la onda, o la profundidad de nivel de agua influye en la velocidad de la onda.

En modo STROBE la onda se verá detenida. Si quiere apreciar el avance de la onda, coloque la luz en modo "STEADY" estacionario. También puede regular en el modo STROBE la perilla de regulación DELTA para apreciar el avance de la onda. Recuerde que si la frecuencia del estroboscopio coincide con la de la ondulación, podrá apreciar la onda como si no se moviera. En cambio, a medida que se difiere la frecuencia del estroboscopio de la fuente de luz con el DELTA, se apreciará que la onda adquiere paulatinamente mayor velocidad.

Profundidad	Frecuencia	5 $\lambda$ [mm]	$\lambda$ [mm]	$v$ [mm/s], [m/s]
4 cm	5 Hz			
4 cm	10 Hz			
4 cm	15 Hz			
7 cm	5 Hz			
7 cm	10 Hz			
7 cm	15 Hz			
10 cm	5 Hz			
10 cm	10 Hz			
10 cm	15 Hz			

### 2.2.2 INTERFERENCIA DE ONDAS

Coloque una barrera pequeña entre dos grandes, dejando dos ranuras con espacio de 2 cm de distancia. Éstas deben estar paralelas a la paleta de onda plana y a una distancia de aproximadamente 5 cm (figura 16).

Encienda el generador y el estroboscopio (modo STROBE), ajuste la frecuencia a 20 Hz y la amplitud en algo menos de la mitad de la regulación máxima.

Trace en el papel colocado en la base los perfiles de las barreras.

Represente las ondas luego de pasar por las barreras.

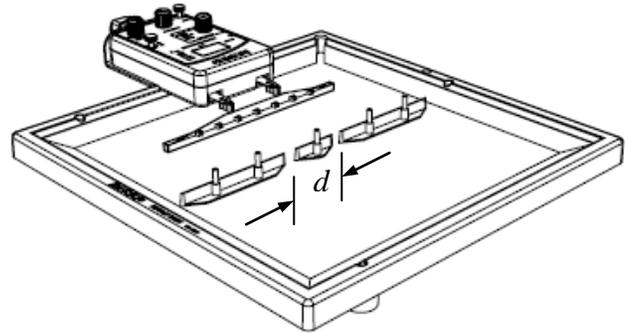


figura 16: Disposición para conseguir interferencia

Busque en qué región, las ondas provenientes de las dos ranuras tienden a anularse, y la otra región en la que tienden a incrementarse o duplicar su amplitud. Mida el ángulo de difracción (ver figura 3).

Decremente la separación entre ranuras “ $d$ ” cambiando la barrera pequeña por la mini barrera, pero manteniendo los 2 cm de espacio en las ranuras.

Finalmente incremente la frecuencia para reducir la longitud de onda.

Se puede conseguir el mismo efecto que se obtenía con las barreras, usando dos paletas estándar como se muestra en la figura 17.

Nuevamente busque las regiones de interferencia constructiva como la destructiva. En el generador de ondulaciones a 20 Hz, cambie el selector de fase para conseguir que las dos paletas estén desfasadas entre sí  $180^\circ$ , visualice de qué modo afecta esto en las regiones de interferencia.

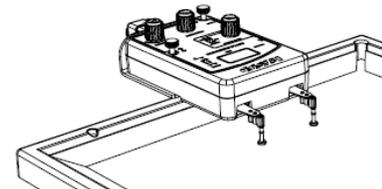


figura 17: Empleando los dos actuadores

Puede hacer variaciones al experimento, conectando los actuadores pequeños y grandes a las paletas; o inclusive, empleando múltiples paletas instaladas en las ranuras de la paleta de onda plana.

### 2.2.3 EFECTO DOPPLER

Manteniendo una paleta estándar instalada en el actuador del generador e iniciando también con una frecuencia de 20 Hz y amplitud menos de la mitad de la regulación máxima. Debe moverse con cuidado al generador con velocidad constante de un extremo a otro y así poder visualizar la distorsión de las ondas, en la parte anterior y posterior del actuador.

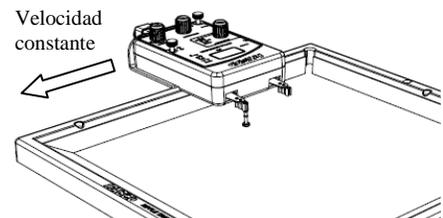


figura 18: Creación del efecto Doppler

### 2.2.4 REFLEXIÓN

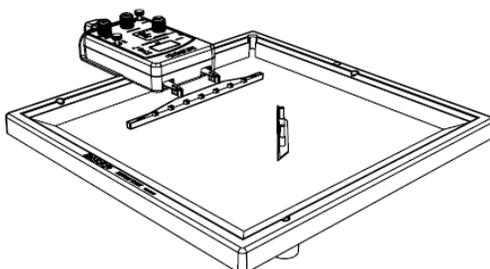


figura 19: Reflexión con barrera “plana”

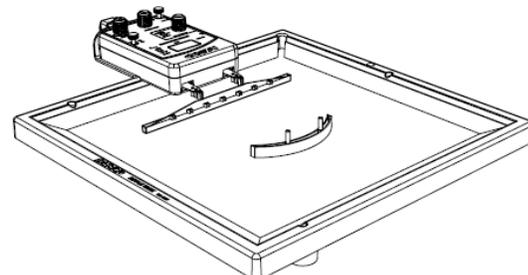


figura 20: Reflexión con reflector curvo

Se coloca la barrera al medio del tanque, formando un ángulo con la paleta de onda plana (figura 19). Añada cerca de 800 ml de agua, de modo de cubrir aproximadamente la mitad de la barrera. No olvide de revisar que la base de la paleta de onda plana toque ligeramente la superficie de agua (figura 13). Inicie como en el caso anterior con el

generador y el estroboscopio con una frecuencia de 20 Hz. La amplitud algo menos que la mitad de la máxima regulación. En la hoja de papel colocada en la base del tanque dibuje la proyección de la barrera con ayuda de una regla, el frente de la onda incidente (antes de tocar con la barrera) y el frente de la onda reflejada (después de reflejarse en la barrera), también ayudándose con una regla. Luego dibuje con una escuadra el rayo incidente, que es la línea perpendicular al frente de onda de la onda incidente, posteriormente el rayo de la onda reflejada que también resulta ser la línea perpendicular del frente de onda reflejada. Debe trazar también la línea perpendicular a la barrera y que parte del punto de intersección de los rayos incidente y reflejado. Con ello podrá determinar los ángulos de incidencia y reflexión. Repita el procedimiento para otra orientación de la barrera.

Como una extensión del experimento, cambie la barrera plana por el reflector curvo fig. 20, dibuje su proyección en el papel de la base y con un compás trace el círculo que lo contiene para determinar el radio "R" de la barrera, posteriormente al encender el generador, aprecie el punto de incidencia o convergencia de los rayos de la onda reflejada. Apague el generador y, usando el gotero, eche gotitas de agua al punto en que convergían los rayos y aprecie de que modo refleja la nueva ondulación producida por las gotas en la barrera circular.

### 2.2.5 REFRACCIÓN

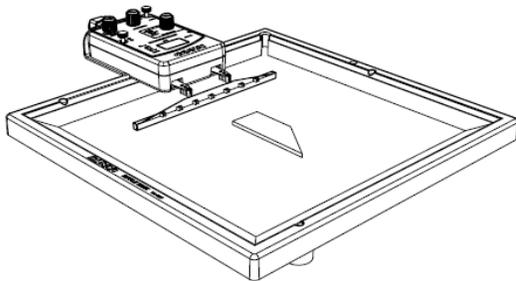


figura 21: Posición del refractor trapezoidal

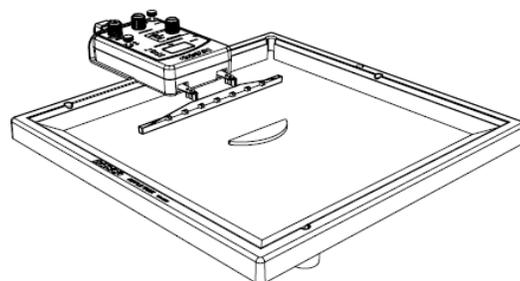


figura 22: Posición del refractor convexo

Coloque inicialmente el refractor trapezoidal al medio del tanque con el lado rectangular paralelo a la paleta de onda plana como se muestra en la figura 21 con una distancia aproximada de 5 cm. Añada agua en una cantidad tal que permita que el refractor esté cubierto con no más de 1 mm de agua. Encienda el generador y estroboscopio (modo STROBE) con una frecuencia de 15 Hz o menos (a menor frecuencia más pronunciada la refracción), la amplitud en un nivel menor a la mitad de la regulación máxima, pudiéndose ajustar a niveles que permita mejor visualización. En el papel colocado en la base de la mesa debe dibujarse el perfil del refractor trapezoidal. Con las ondas desplazándose deben dibujarse también los frentes de la onda antes de refractarse y, cuando está siendo refractada (cambiada de dirección) en el interior del refractor trapezoidal, ayúdese con una regla para ello. Las líneas paralelas que representan el frente de onda le ayudarán a dibujar los rayos (perpendiculares a los frentes) Luego revierta la orientación del refractor trapezoidal, de manera que la punta triangular apunte a la paleta de onda plana.

Repita el procedimiento con un refractor convexo, colocándolo a 5 cm de la paleta de onda plana como se muestra en la figura 22. Trace en el papel colocado bajo el tanque el perfil del refractor, dibuje con una regla las líneas paralelas del frente de la onda incidente. El punto donde parecen converger los planos de la onda refractada es el foco del refractor. Para finalizar, cambie el refractor convexo por uno cóncavo y dibuje el nuevo patrón que se consigue.

### 2.2.6 DIFRACCIÓN

Disponga las dos barreras grandes como se muestra en la figura 23, dejando un espacio en la apertura de 3 cm y cuidando que las barreras estén a 5 cm y paralelas a la paleta de onda plana. Vierta unos 800 ml de agua, que es la cantidad requerida para que la mitad de las barreras queden sumergidas. Encienda el generador y estroboscopio en 20 Hz y regule la amplitud a partir de un nivel medio a uno que permita una buena visualización del efecto. Dibuje el perfil de las barreras y los frentes de onda que muestran difracción.

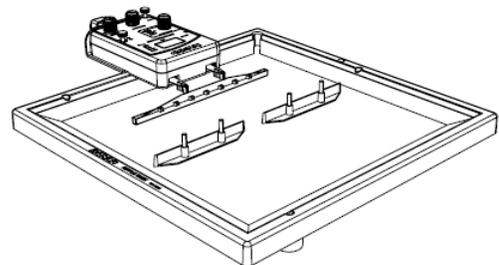


Figura 23: Disposición de las barreras

Posteriormente aproxima las barreras entre sí para que la distancia de la apertura se reduzca a 1,5 cm, dibuje los nuevos frentes de la onda difractada (ángulo de difracción). Para concluir, manteniendo la separación entre barreras de 1.5 cm, incremente la frecuencia del generador y observe el cambio en la longitud de onda y el efecto de difracción de la onda.

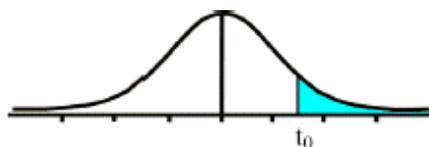
Otra variación al experimento consiste en colocar la mini barrera en el espacio dejado por las barreras grandes y retirar a estas últimas. Proceda a visualizar el nuevo fenómeno.

### 3. INFORME DE LAS OBSERVACIONES

- 1 Indique si la velocidad de la onda depende de la frecuencia o de la profundidad de agua en el tanque, justifique su respuesta con los registros obtenidos en la práctica.
- 2 Calcule ¿cuánto vale el coeficiente de compresibilidad del agua empleada en el laboratorio?
- 3 Explique qué velocidad visualizará en la onda, si la frecuencia del estroboscopio es 0,8 Hz mayor que la entregada por el generador de ondulaciones.
- 4 Cuando la distancia entre aperturas de las barreras disminuye, ¿el ángulo de difracción disminuye o aumenta?, ¿se cumple que:  $d \sin \theta = m\lambda$  ?
- 5 Cuando la frecuencia de la onda incrementa y disminuye su longitud de onda, ¿el ángulo de difracción disminuye o aumenta?
- 6 Indique la relación entre el radio de la barrera circular y la distancia entre el punto de convergencia de los rayos reflejados con la barrera circular y la barrera circular.
- 7 Indique la relación entre el ángulo de incidencia con el ángulo de reflexión de una onda reflejada en una barrera plana.
- 8 Indique si la onda refractada en el experimento realizado, aumenta o disminuye su velocidad con el material empleado, ¿qué pasa con su longitud de onda?, ¿qué hace que la onda se doble o distorsione más?
- 9 El ángulo con el que se extiende la onda después de pasar por una restricción es conocido también como ángulo de difracción, indique si dicho ángulo se incrementa o disminuye al cambiar el ancho de la restricción de 3 a 1,5 cm, ¿depende este ángulo de la frecuencia?.
- 10 Dibuje al menos un caso visualizado para: a) onda plana viajera, b) interferencia de onda, mostrando regiones constructiva y destructiva, identificando el ángulo de difracción, c) efecto Doppler, d) reflexión de onda plana mostrando ángulos de incidencia y ángulo de reflexión. Dibuje también la reflexión de la ondulación producida por las gotas que caen en el puntos de incidencia en la barrera circular (realizada en la prueba de reflexión en barrera circular) e) refracción de onda plana, f) difracción de una onda plana, indicando el ángulo de difracción.

# ANEXO

Tabla t-Student



Grados de libertad	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.0000	3.0777	6.3137	12.7062	31.8210	63.6559
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9645	9.9250
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8408
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7765	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9979	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7970
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3007	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800

## RESUMEN DE FÓRMULAS

NOMINACIÓN	FÓRMULAS DE LA DEFINICIÓN	FUNCIONES DEL EXCEL (Insertar/Función/Estadísticas)
Promedio	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$	=PROMEDIO(datos x)
Varianza muestral	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	=VAR(datos x)
Desviación estándar muestral	$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	=DESVESTA(datos x)
Intervalo de confianza	$\mu = \bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$	
Estadístico de prueba 1 parámetro	$t_{calc.} = \frac{ \bar{x} - \mu }{s/\sqrt{n}}$	
Estadístico de prueba 2 parámetros	$t_{calc.} = \frac{ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 }{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ , Suponiendo $s_1 \approx s_2$ $s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$	
<b>REGRESIÓN</b>		
$y = a + bx$ Corte en la ordenada "a"	$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x)^2}$	=INTERSECCION.EJE(datos y; x)
$y = a + bx$ Pendiente "b"	$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$	=PENDIENTE(datos y; x)

Coeficiente Correlación $-1 < r < +1$	$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] \cdot [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$	=COEF.DE.CORREL(datos y; x)
Desv. Estándar estimada “ $s_{y/x}$ ”	$s_{y/x} = \sqrt{\frac{\sum [(a + bx_i) - y_i]^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n - 2}}$	=ERROR.TIPICO.XY(datos y; x)
Desv. Estándar estimada de b: $s_b$	$s_b = \frac{s_{y/x}}{\sqrt{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2}}$	=ERROR.TIPICO.XY(datos y; x) / RAIZ(DESIVIA2(datos x))
Desv. Estándar estimada de a: $s_a$	$s_a = s_{y/x} \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$	=ERROR.TIPICO.XY(datos y; x) * RAIZ(SUMA.CUADRADOS(datos x) / (CONTARA (datos x) * DESIVIA2 (datos x)))
Estadísticos de prueba para a, b y r	$t_{calc.} = \frac{ b - b_o }{s_b}; \quad t_{calc.} = \frac{ a - a_o }{s_a}$	
<b>TABLA T STUDENT</b>		
$t_{\alpha/2;v}$ bilateral o 2 colas	t en función de significancia “ $\alpha/2$ ” y grados de libertad “v”	=DISTR.T.INV( $\alpha$ ;v)
$t_{\alpha;v}$ unilateral o 1 cola	t en función de significancia “ $\alpha$ ” y grados de libertad “v”	=DISTR.T.INV( $2\alpha$ ;v)
valor – p		=DISTR.T( $t_{calc.}; v; 2$ ) Dos colas o bilateral =DISTR.T( $t_{calc.}; v; 1$ ) Una cola o unilateral

